

二等辺三角形の問題



問題

半径1の円に外接する $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC において、 $\angle BAC=2\theta$ とすると、 AC が最小となるときの $\sin \theta$ の値を求めよ。(2020, 早稲田大学)

解答

半径1の円の中心を O とし、 $OA=x$ とおくと、

$$x > 1 \dots \textcircled{1}, \quad \sin \theta = \frac{1}{x}, \quad \textcircled{2} \text{より} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \dots \textcircled{2}$$

$$AC \cos \theta = x + 1 \quad \text{より,}$$

$$AC = \frac{x+1}{\cos \theta} = \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-1}} = f(x) \quad \text{とおく。}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-1} - x(x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{(2x+1)(x^2-1) - x^2(x+1)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^3 - 2x - 1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

x	1	...	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	最小	↗

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \quad (\text{黄金比}) \quad \text{のとき, } AC \text{ は最小。}$$

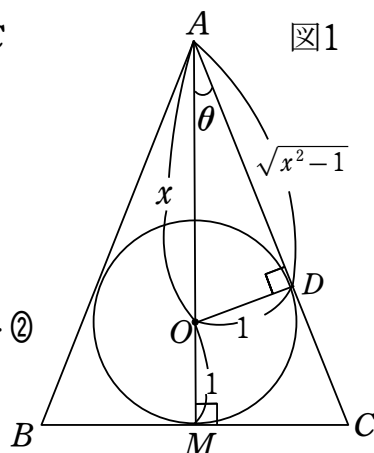
$$\text{このとき, } \sin \theta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \textcircled{答}$$

コメント

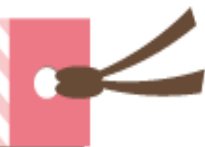
半径1の円に外接する二等辺三角形で、等しい辺 ($AB=AC$) が最小となるのは、 $AB=BC=CA$,

$$\text{つまり} \triangle ABC \text{ が正三角形のときと思いがちだが、違う。} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \div \frac{2.236-1}{2} = 0.618$$

で、 $\theta \div 38^\circ$ であり、 $2\theta \div 76^\circ > 60^\circ$ であるから、頂角が 60° より大きい二等辺三角形のときとなる。



山脇の超数学講座 No. 31



二等辺三角形と黄金比

この問題では、 $x=\phi$ となっていることが重要である。辺 BC の中点を M ，点 O から辺 AC におろした垂線の足を D とすると、 $AO:OD=AO:OM=\phi:1$ ，

つまり「**黄金比分割**」となっている。

また、 $\triangle ACM \sim \triangle AOD$ より、 $AC:CM=AO:OD=\phi:1 \dots\dots ③$ となっている。

$x=\phi$ は、 $x^2-x-1=0$ の解であるから、 $\phi^2-\phi-1=0 \dots\dots ④$

②より、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{\phi^2-1}}{\phi} = \frac{\sqrt{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\phi^2-1}} = \tan \theta$ ($\because$ ④) となり、

$\triangle ACM$ ， $\triangle AOD$ においては、 $\cos \theta = \tan \theta$ となっている。

この関係は、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{\phi}}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}} = \frac{\sqrt{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$ としても確かめられる。

すると、 $CD=CM=AM \tan \theta = (\phi+1) \frac{1}{\sqrt{\phi}} = \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi}} = \phi \sqrt{\phi} = \phi^{\frac{3}{2}}$ ($\because$ ④)，

さらに③より、 $AC=\phi \cdot CM=\phi^2 \sqrt{\phi}=\phi^{\frac{5}{2}}$ であり、 $AD=\sqrt{\phi}=\phi^{\frac{1}{2}}$ となり、 $CD:DA=\phi:1$ と、ここにも「**黄金比分割**」を見出すことができる。

そして、 $CD+DA=\phi^{\frac{3}{2}}+\phi^{\frac{1}{2}}=(\phi+1)\phi^{\frac{1}{2}}=\phi^{\frac{5}{2}}$ ($\because$ ④)

結論 半径1の円に外接する $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC

では、図2のようなときに 等辺 $AC(=AB)$ は最小となる。

図2

このとき、 $\sin \angle CAM = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であり、

AC の最小値は、 $\phi^2 \sqrt{\phi} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \doteq 3.330$ となる。

また、このときの $\triangle ABC$ の面積は、

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\phi \sqrt{\phi} \times (\phi+1) = \phi^{\frac{3}{2}} \times \phi^2 = \phi^{\frac{7}{2}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{\frac{7}{2}} \doteq 5.388$ となる。($\because$ ④)，

辺の長さも面積も ϕ (黄金比) の累乗 で表されるところが素晴らしく、美しい三角形といえるだろう。正三角形の場合と比較してみるとよい。 (続)

