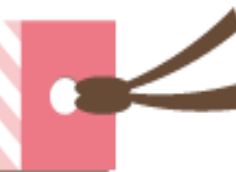




山脇の超数学講座 No.11



「黄金比 Φ 」とは？ (第2回)

新食堂の名前，“K.G Cafe Phi Φ ” — この“ Φ (ファイ)”

にちなんだ話の2回目になります。 ϕ は数学では「黄金比」を表します。

□ 黄金比の数としての美しさ (その1)

黄金比の数 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は、次の2次方程式の解であることは前回述べました。

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \dots\dots①$$

① を次のように式変形して、両辺を x (0 ではない) で割ると、

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{x} \quad \dots\dots②$$

さて、② の右辺の x のところに、② の式そのものを代入すると、

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} \quad \dots\dots$$

というように、際限なく x を代入していくことができ、同じ分数の形が次々と現れます。黄金比の美しさの秘密は、この「魔法のような数」にあるとも言えます。「すごい」と思いませんか？

書き直せば、

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

□ 黄金比の数としての美しさ (その2)

「黄金比の不思議」は、さらにあります。

①を同じように式変形して、 $x > 0$ だから、次のように表現してもかまいません。

$$x^2 = 1 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1 + x} \quad \dots\dots③$$

さて、③ の右辺の x のところに、③ の式そのものを代入すると、どうなるか？

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}} \quad \dots\dots$$

となつて、またしても際限なく x を代入していくことができ、同じ平方根の形が次々と現れることがわかります。

書き直せば、

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

のような関係が成り立っているということです。このように表現される数は「黄金比」しかないことが知られています。自然界に「黄金比」が存在するのは、このような数であるところにも秘密がありそうですね。また **正五角形** の1辺の長さとお角線の長さの比は黄金比になっています。この話は次回にしましょう。 (続く)