

3 次方程式の解の公式¹



□ タルタリアとカルダノが生涯をかけた3次方程式の解

さて、今回は三角比から予定を変更して、「3 次方程式の解の公式」をテーマとした。この公式が生まれるまでに、16 世紀イタリアの 2 人の数学者タルタリアとカルダノの闘いがあった。その話は次回にすることにして、今回は、その「解の公式」の求め方を紹介しよう。

3次方程式の一般的な形は、 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$ ①

①の両辺を a で割って、 $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ ②

②の式の x を $X = x + \frac{b}{3a}$ という変換を行って、 X の方程式に焼き直すと、

$X^3 + pX + q = 0$ という形の方程式が得られる。

すなわち、①を解くためには、 $x^3 + px + q = 0$ ③ を解けばよいことになる。

この方程式を解くカギは、次の因数分解の公式である。

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad \text{.....④}$$

③を④の形にするには、

$$\begin{cases} p = -3yz \\ q = y^3 + z^3 \end{cases} \quad \text{.....⑤} \quad \text{とすればよく、} \ y \text{ を消去して、} \ q = \left(-\frac{p}{3z}\right)^3 + z^3 \quad \text{を得る。}$$

両辺に z^3 をかけて移項すれば、 $z^6 - qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ ⑥ となる。

⑥で、 $t = z^3$ ⑦ とおけば、

⑥は、 $t^2 - qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ ⑧ という2次方程式になる。

⑧を、2次方程式の解の公式を用いて解くと、

$$t = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{が解であることがわかる。}$$

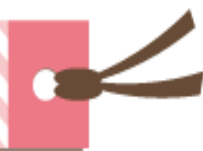
⑦の置き換えから、 $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ⑨ が得られる。

ここで⑤において、 y と z は対称だから、

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{.....⑩} \quad \text{となる。} \quad (\text{⑨, ⑩は複号同順})$$

⑨、⑩の y と z を使うと、③の3次方程式の左辺は、④に一致する。

山脇の超数学講座 No. 21



つまり、③の3次方程式が因数分解されることになり、④=0の解を求めればよい。

$$\text{ゆえに, } (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

これを x についての方程式と見なせば,

$$x = -y - z \quad \dots\dots ⑪ \quad \text{または,} \quad x^2 - (y+z)x + y^2 + z^2 - yz = 0 \quad \dots\dots ⑫$$

⑪に ⑨, ⑩ を代入すると,

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

±のどちらをとっても同じ式となるから、結局⑪は,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \dots\dots ⑬$$

これがタルタリアが発明した「3次方程式の解の公式」であった。

しかし、これですべてではない。⑫の解が残っている。

⑫でも2次方程式の解の公式を使うと,

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+z \pm \sqrt{(y+z)^2 - 4(y^2 + z^2 - yz)}}{2} = \frac{y+z \pm \sqrt{-3y^2 - 3z^2 + 6yz}}{2} \\ &= \frac{y+z \pm \sqrt{-3(y-z)^2}}{2} = \frac{y+z}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)i \quad (i \text{ は虚数単位}) \end{aligned}$$

こうして、残りの2つの解 $x = \frac{y+z}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)i \quad \dots\dots ⑭$ が求められた。

(この y, z に⑨, ⑩を代入すると、③の解が p, q で表される。ここでは省略)

今では⑭への式変形は難なくできるが、当時虚数単位 i はない。

だから、カルダノは $\sqrt{-1}$ のままで、実際にはなく、役に立たない数と考えた。

しかし、虚数は2次方程式の解でも存在するから、カルダノは虚数があれば、どんな2次方程式でも解が求められることに気づいたのだ。タルタリアも虚数の誕生に一役買ったと言ってよいだろう。

どうですか? 「3次方程式の解の公式」は、2次方程式の場合のように簡単に導き出されるものではなく、 a, b, c の式で簡単に表されるものでもありません。けれども、「**3元3次の因数分解の公式** (④)」が使われており、「**2次方程式の解の公式**」も使われています。**虚数の誕生**に大きな役割を果たしました。まだ不十分な点が残っていますので、次回に続きます。