

「黄金比 Φ 」とは？



(第10回)

“K.G Cafe Phi Φ ” — “ Φ (ファイ)” = 「黄金比」の話の最終回です。

□ 黄金比の n 乗 (ϕ^n) はどうなるのか？

黄金比 ϕ は、 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解である。 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ と定義する。

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ より、 $\phi^2 = \phi + 1 \dots \textcircled{1}$ という関係式が生まれる。①から次々と ϕ^n (ϕ の n 乗) が導かれる。

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = \phi + \phi + 1 = 2\phi + 1,$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi(2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2,$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi(3\phi + 2) = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3,$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi(5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5, \dots\dots$$

……、ここで、 ϕ の係数となっている 1, 1, 2, 3, 5, 8, ……は、「フィボナッチ数」(超数学No.13)である。

そこで、フィボナッチ数の一般項を a_n とすると、 ($a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \dots\dots \textcircled{2}$)

$$\phi^n = a_n \phi + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots (*) \text{ が成り立つ。}$$

証明

[1] $n = 2$ のとき、 $\phi^2 = a_2 \phi + a_1 = \phi + 1$ で、 (*) は成り立っている。

[2] $n = k$ のとき、 $\phi^k = a_k \phi + a_{k-1}$ ($k \geq 2$) と仮定すると、

$$\begin{aligned} n = k+1 \text{ のとき、 } \phi^{k+1} &= \phi \cdot \phi^k = \phi(a_k \phi + a_{k-1}) = a_k \phi^2 + a_{k-1} \phi = a_k(\phi + 1) + a_{k-1} \phi \\ &= (a_k + a_{k-1})\phi + a_k = a_{k+1} \phi + a_k \text{ となり,} \end{aligned}$$

$n = k+1$ のときも、 (*) は成り立っている。

ゆえに、数学的帰納法により、2以上の自然数 n に対して、(*) が成り立つことが証明された。

《参考》 フィボナッチ数列の一般項からも証明は可能である。

$$\textcircled{2} \text{ の一般項は、 } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = \frac{1}{2\phi - 1} \{ \phi^n - (1 - \phi)^n \} \text{ であつた。}$$

$$a_n \phi + a_{n-1} = \frac{1}{2\phi - 1} \{ \{ \phi^n - (1 - \phi)^n \} \phi + \phi^{n-1} - (1 - \phi)^{n-1} \}$$

$$= \frac{1}{2\phi - 1} \{ \phi^{n+1} - \phi(1 - \phi)^n + \phi^{n-1} - (1 - \phi)^{n-1} \}$$

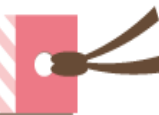
$$= \frac{1}{2\phi - 1} \{ \phi^{n-1}(\phi^2 + 1) - \{ \phi(1 - \phi) + 1 \} (1 - \phi)^{n-1} \}$$

$$= \frac{1}{2\phi - 1} \left\{ \phi^n \left(\phi + \frac{1}{\phi} \right) - (1 + \phi - \phi^2)(1 - \phi)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\phi - 1} \{ \phi^n (2\phi - 1) - 0 \cdot (1 - \phi)^{n-1} \} = \phi^n \quad (n \geq 2) \text{ と } (*) \text{ が証明できた。}$$

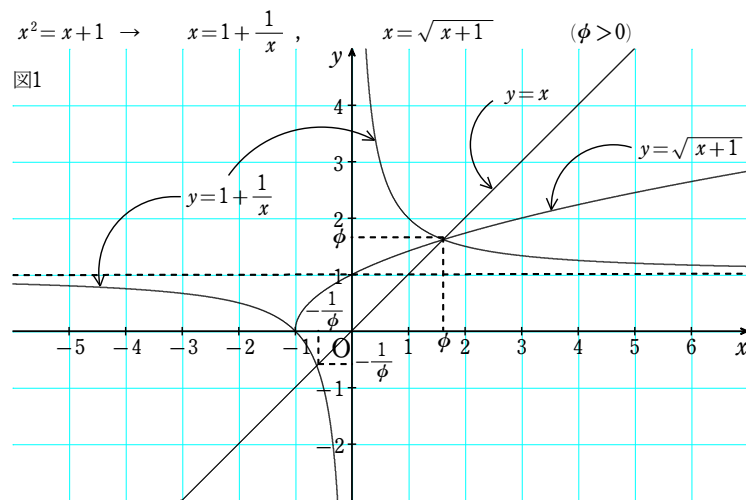
$$\left(\because \phi^2 - \phi = 1 \text{ より、 } \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \phi + \frac{1}{\phi} = 2\phi - 1 \right)$$

山脇の超数学講座 No. 19



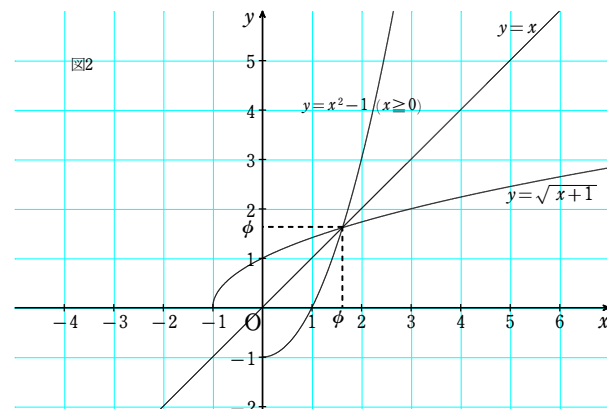
□ 黄金比 ϕ がつなく グラフとグラフ

黄金比 ϕ が $x^2 - x - 1 = 0$ の解であることは、いろいろな示唆を与える。



ある関数のグラフとその逆関数のグラフが、直線 $y = x$ (2つのグラフの対称軸) 上で交わることを踏まえると、

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 & (x \geq 0) \\ y = \sqrt{x + 1} \end{cases} \text{ の2つのグラフは、点 } (\phi, \phi) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ で交わる。図2}$$



京都学園中学高校の新食堂カフェ「ファイ」のオープンに合わせて特集してきた「 ϕ の話」は1年間も続きました。

様々な数学の話を交えて進めてきましたが、ここで区切りとします。次回は違う内容です。お楽しみに!!