

「黄金比 Φ 」とは？ (第4回)



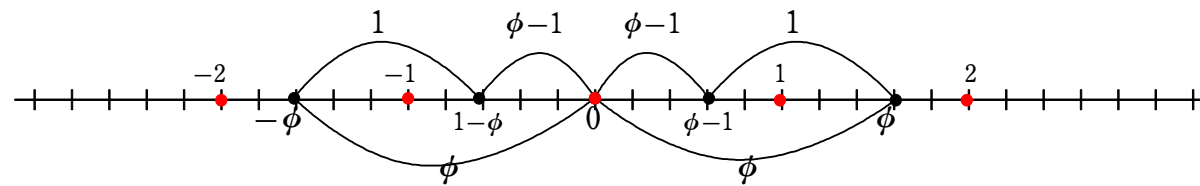
新食堂の名前，“**K.G Cafe Phi Φ** ” — この“ Φ (**ファイ**)”にちなんだ話の4回目になります。 ϕ は数学では「黄金比」を表します。

□ 黄金比と数直線

前回からの続きです。2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ で、これは ϕ , $1 - \phi$

と書ける。次に $x^2 + x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ で、 $-\phi$, $\phi - 1$ と書ける。

これらを数直線上にとってみると、下の図のようになる。ちなみに $\phi \doteq 1.618$ である。



黄金比の定義 (第1回) に立ち返ってみると、 $\phi : 1 = 1 : \phi - 1$ が成り立っている。 ϕ は $x^2 - x - 1 = 0$ (…①) の解、 $\phi - 1$ は $x^2 + x - 1 = 0$ (…②) の解なのである。負の数でも $\phi : 1 = 1 : \phi - 1$ が成り立っていて、 $1 - \phi$ は①の解、 $-\phi$ は②の解である。直線の黄金比分割においては、①と②が相互に補完しあっているといつてよい。

また、 $\phi : 1 = 1 : \frac{1}{\phi}$ とも書けるので、 $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ であることが納得できる。

それでは ϕ , $\frac{1}{\phi}$, $-\phi$, $-\frac{1}{\phi}$ を解に持つ4次方程式はどうなるか？

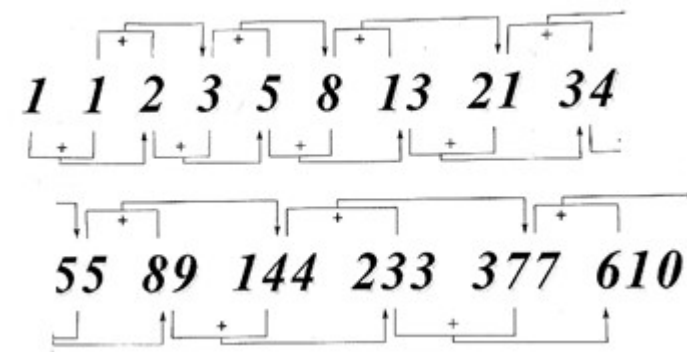
$$(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \dots\dots ③$$

③もまた、数直線上で黄金比を考えたときの「黄金比方程式」といえそうだ。

□ 黄金比とフィボナッチ数列

「フィボナッチ数列」と呼ばれる次のような数の配列の中にも、「黄金比」が存在することが知られている。

フィボナッチ数列 とは、前の2つの数を足すと次の数になる「数の並び」(数列)のことである。



1	>	1.000000
1	>	2.000000
2	>	1.500000
3	>	1.666666
5	>	1.600000
8	>	1.625000
13	>	1.615384
21	>	1.619047
34	>	1.617647
55	>	1.618181
89	>	
...	>	
ϕ	>	

フィボナッチ数列を、数列の方程式で書くと、次のような式(「漸化式」)になる。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

ここで、 $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \dots (*)$ として、 $x^2 - x - 1 = 0 \dots ①$ としてみる。

①の解をいったん α , β とすると、①は $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ となる。

$$\text{これを展開すると, } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x = \beta(x - \alpha)$$

よって、(*)は、 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と書き換えられる。

ここで、 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ という数列は、初項が $a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha = \beta$ ($\because \alpha + \beta = 1$)、

公比が β の等比数列となり、 $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta \cdot \beta^{n-1} = \beta^n \dots ④$

まったく同様な式変形で、 $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^n \dots ⑤$

⑤ - ④ によって、 $(\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n \dots ⑥$

あらためて①を解いて、 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$, $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta$ とすれば、

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$ なので、⑥より、 a_n を n の式で表すことができ、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \text{ となる。 } \sqrt{5} = \phi - (1 - \phi) = 2\phi - 1 \text{ だから,}$$

$$\text{黄金比 } \phi \text{ を用いて書けば, } a_n = \frac{1}{2\phi - 1} \{ \phi^n - (1 - \phi)^n \} = \frac{1}{2\phi - 1} \left\{ \phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right\}$$

となる。フィボナッチ数列は、黄金比と密接な関係にあるのだ。