ピタゴラス数へのこだわり

さて，前回　2019　を含むピタゴラス数のことを述べた。結果が兆を超える大きな数になった。

$$2019^2+2038180^2=2038181^2$$

しかし，もう一つ　2019を含むピタゴラス数があった。次の式を使う。

$$\boxed{(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2\cdots(**)}$$

$m^2-n^2=(m+n)(m-n)=2019$　とする方法である。　$2019=673\times3$　（673，3 は素数）

だから　$\begin{cases} m+n=673 \\ m-n=3 \end{cases}$　とすればよい。これを解くと，　$m=338$，$n=335$　となる。

$2mn=2\times338\times335=226460$，　$m^2+n^2=338^2+335^2=226469$　となって，

（$**$）に代入すると，　$2019^2+226460^2=226469^2$　……①　が成り立ち，

（ 2019，226460，226469 ）……②　という 2019 を含む新たなピタゴラス数が見つかった！

①を計算すると，　$4076361+51284131600=51288207961$　となる。

右辺の数は，　51,288,207,961　で「512億8820万7961」であり，前回のように兆は超えなかったが，大きい数であることは間違いない。

②の組で，2番目と3番目は9 しか違わない。これは，　$(m^2+n^2)-2mn=(m-n)^2$　であり，今回の場合，　$m-n=3$　だから，　$(m-n)^2=9$　というところからきている。

まだあるのではないか。　$2019=2019\times1$　だから，

$\begin{cases} m+n=2019 \\ m-n=1 \end{cases}$　として，　$m=1010$，$n=1009$　であるが，

$2mn=2\times1010\times1009=2038180$，　$m^2+n^2=1010^2+1009^2=2038181$　となって，

これは前回に示したピタゴラス数だから，新しいものとはならない。

（ 2019，2038180，2038181 ）……③　2番目と3番目が1 しか違わない理由はわかりますね。

以上，2019　を含むピタゴラス数は，②と③しかないということになるが，もし2019を含む新たなピタゴラス数を発見したら教えて下さい。

$$2019^2+226460^2=226469^2$$

山脇の超数学講座　No. 9

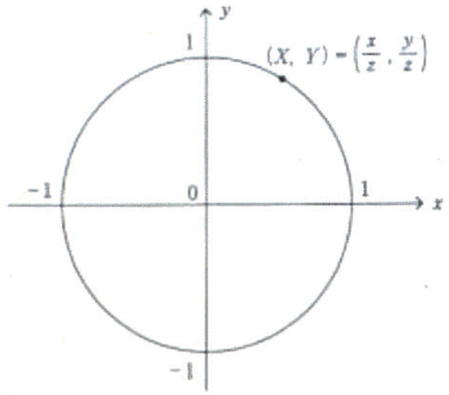
ここからは，ピタゴラスの定理の式の文字を　x, y, z　を使って表した方程式

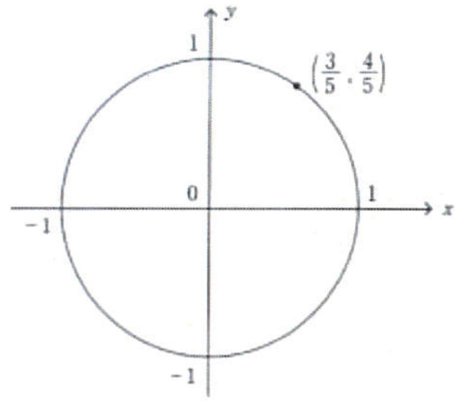
$x^2+y^2=z^2$　で考えていくことにしよう。　（ $xyz\neq0$ ）

両辺を　z^2　で割ると，

$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=1$　となる。　$X=\frac{x}{z}$，$Y=\frac{y}{z}$　とおくと，

$X^2+Y^2=1$　となる。　座標平面上で　$x^2+y^2=1$　は原点中心，半径1の円（単位円）を表すから，x, y, z　が整数であれば，次の図のように，ピタゴラス数は単位円上の有理点（座標が有理数である点）に対応することがわかる。（これは9月の「フェルマーの最終定理」でも述べた。）





これが **三角関数** と大いに関係していて，三角関数 のもっとも重要な公式

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ……④　は，「ピタゴラスの定理」を三角関数で表したものであるが，これは点（$\cos\theta$，$\sin\theta$）が単位円上の点であることを意味している。（三角関数の定義にもなる）

ここで，（$**$）の式の両辺を　$(m^2+n^2)^2$　で割ってみると，

$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2+\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2=1$　となり，さらに（　）内の　分母・分子を　m^2 で割ると，

$\left\{\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}\right\}^2+\left\{\frac{2\left(\frac{n}{m}\right)}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}\right\}^2=1$　となる。　$\frac{n}{m}=\tan\frac{\theta}{2}=t$　とおくと，

$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，　$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$　となって，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ を結ぶ覚えておくべき三角関数の公式になるのである。「**ピタゴラス数**」は本当に興味が尽きませんね。