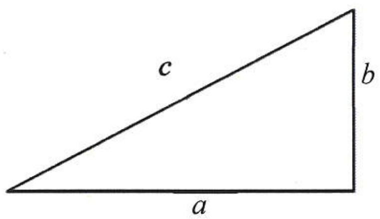
山脇の超数学講座 No.8

ピタゴラス数について

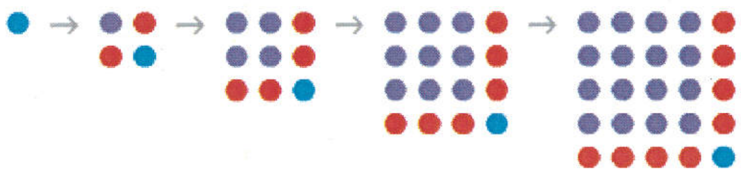
直角三角形の斜辺（一番長い辺）の長さを c とし，その他の辺の長さを a, b としたとき，右の等式が成り立つ。

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

この「**ピタゴラスの定理**」を成り立たせるもっとも簡単な整数は，「**3，4，5**」である。このような３つの整数の組を，「**ピタゴラス数**」と呼ぶことは第４回で述べた。「3,4,5」のほかには，「5,12,13」や「8,15,17」などがピタゴラス数であることも。それでは「ピタゴラス数」を見つける方法を考えよう！



《　「奇数の和＝平方数」からつくる　》



正の奇数を１から順に加えていくと、常にその結果は平方数になる。

$$1=1^2,\ 1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2,\ 1+3+5+7=4^2,\ \cdots\cdots$$

これは美しい性質で，上の図のようにも説明できるが，正式には，

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$$

として証明する。（n は自然数，つまり $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）

奇数には平方数である奇数がある。その手前までの奇数の和も平方数になるから，

$1+3+5+7+9 =1+3+5+(2\cdot4-1)+3^2=4^2+3^2$，

一方，$1+3+5+7+9=1+3+5+7+(2\cdot5-1)=5^2$ となり，$4^2+3^2=5^2$ で，

$(3, 4, 5)$ が見つかった。同じようにして，

$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+23+25=1+3+5+\cdots+(2\cdot12-1)+5^2=12^2+5^2=13^2$,

$1+3+5+\cdots+47+49=1+3+5+\cdots+(2\cdot24-1)+7^2=24^2+7^2=25^2$,

というように，$(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$ という ピタゴラス数が見つかる。

これを一般化すると，次のようになる。

$1+3+5+\cdots\cdots+\{(2n+1)^2-2\}+(2n+1)^2=S$ とおく。さらに，

$1+3+5+\cdots\cdots+\{(2n+1)^2-2\}=T$ とおくと，$(2n+1)^2-2=2(2n^2+2n)-1$ だから

$T=(2n^2+2n)^2$ となり，$(2n+1)^2=2(2n^2+2n+1)-1$ と書けるから，$S=(2n^2+2n+1)^2$

以上より，$\boxed{(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2 \quad \cdots\cdots(*)}$ が成り立ち，

$(2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1)$ というピタゴラス数ができあがる。

$n=4$ とすれば $(9, 40, 41)$，$n=5$ とすれば $(11, 60, 61)$，

$n=13$ とすると，$(27, 364, 365)$ となる。1年の日数である 365 はピタゴラス数の一角であった。

$(*)$ の等式ですべてのピタゴラス数が表せるかというとそうではない。たとえば，$(8, 15, 17)$ など。

一般的には，$\boxed{(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2\cdots(**)}$ という恒等式から導かれる

$(\ m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2\ )$ がすべてのピタゴラス数を表す。$m=4, n=1$ の場合が $(8, 15, 17)$

ただし，m, n は自然数で，$m>n$，m と n は互いに素で，一方が偶数，一方が奇数である。

$(**)$ で m^2+n^2 は奇数であり，奇数の2乗は4で割って1余る。2019 は $(**)$ の右辺とはならない。

2019 を含むピタゴラス数は，$(*)$ の式で $n=1009$ とするしかない。すると次のようになる。

$$2019^2+2038180^2=2038181^2$$

さらに，実際の自然数で書くと，

$$407631+4154177712400=4154181788761$$

右辺の数は，実に「4 兆 1541 億 8178 万 8761」である。

右に１月 14 日に実施された「第 29 回数学オリンピック」の問題を掲示しておきます。
考えてみるだけでも，おもしろいですよ。