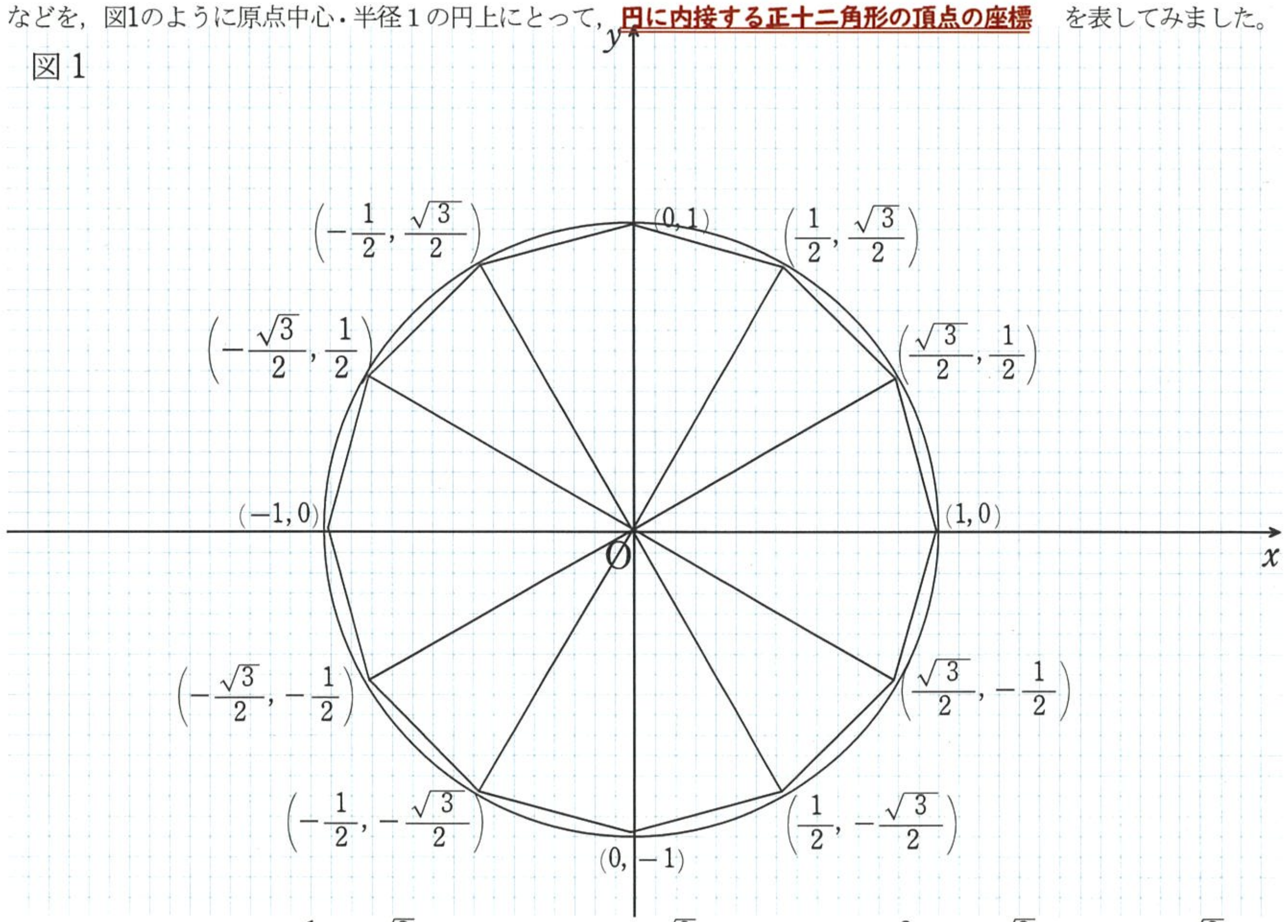
「黄金比 Φ」とは？ (第 8 回)

“ K.G Cafe Phi Φ ”— “Φ（ファイ）” ＝「黄金比」の話の８回目です。

□ 三角関数と複素数平面

(1) 前回は，x 軸の正の方向から反時計回りに θ だけ回転したところの円周上の点の座標が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であることを確認。今回は，$\cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$；$\cos 60^\circ=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ などを，図1のように原点中心・半径１の円上にとって，**円に内接する正十二角形の頂点の座標** を表してみました。

図 1



次に，$\cos 45^\circ=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 45^\circ=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\cos 135^\circ=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ などを記していくと，**円に内接する正八角形の頂点の座標** を表せます。これで主要な三角関数の値が覚えられます。(図2)

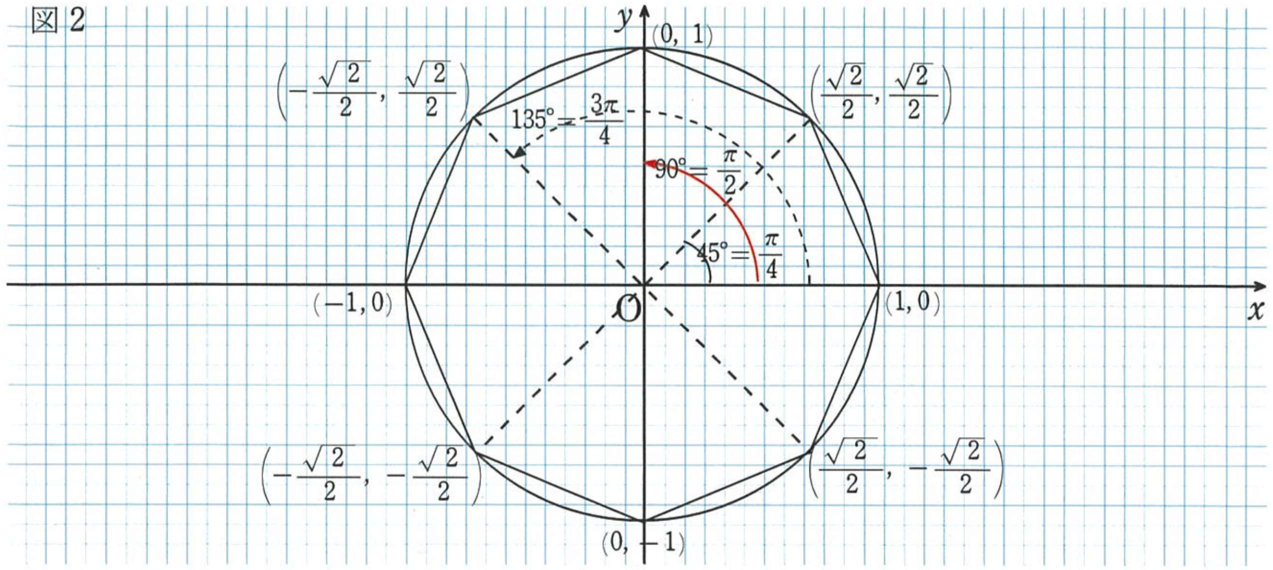
(2) ここで「**複素数平面**」を導入します。「3乗すると１になる数」(3乗根) を求めるにはどうしたらよいでしょうか？ $x^3=1$ という方程式を解くことになります。まず $x=1$ という解を思いつきます。しかし，$x^3-1=0$ として，$(x-1)(x^2+x+1)=0$ と因数分解すると，$x^2+x+1=0$ という2次方程式の解も「3乗して１になる数」では？

「解の公式」を使って実際に解いてみると，$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ と平方根の中にマイナスの数が入ってしまいます。

そこで，$\sqrt{-1}$ にあたる数を i と表して書き直すと，$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となります。このような数を **虚数**（想像上の数）といいます。

山脇の超数学講座 No. 17

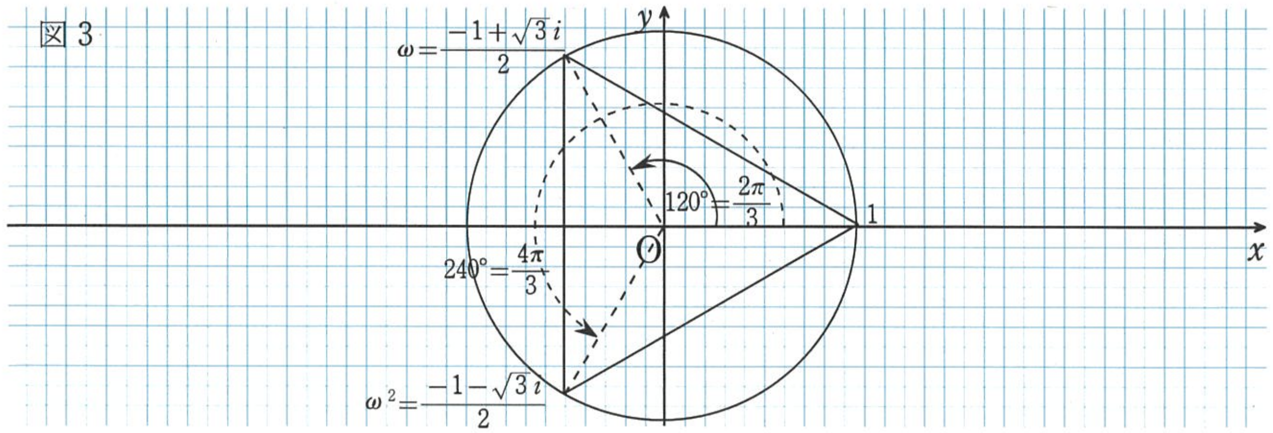
図 2



i を虚数単位といい，$x+yi$（x, y は実数）で表される数を **複素数** といいます。（$y=0$ のとき実数，$y\neq 0$ のとき虚数を表します） 虚数は数直線上に表すことができません。そこで，座標平面上の点 (x, y) に対して，複素数 $x+yi$ を対応させて表します。このように定義された平面を **複素数平面** といいます。大変便利な定義です。

たとえば，「3乗して１になる数」のうち，虚数である次の2つは，$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ と書けるので，複素数平面上では 図3 のように点をとることができます。

図 3



「3乗して１になる数」(1の3乗根) を 1，$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega$，$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\omega^2$ と書きます。ωは「オメガ」と読み，π や ϕ と同じくギリシャ文字（24番目）です。図3のように，1，ω，ω^2 は複素数平面上で，原点中心・半径１の **円に内接する正三角形の頂点** を表します。また，ωとω^2 は，$\omega+\omega^2=-1$（和が -1），$\omega\times\omega^2=\omega^3=1$（積が 1）であり，2次方程式 $x^2+x+1=0$ の2つの解です。これに対し黄金比 ϕ と $1-\phi=-\frac{1}{\phi}$ は，和が 1，$\phi\times\left(-\frac{1}{\phi}\right)=-1$ で積が -1 であり，2次方程式 $x^2-x-1=0$（「黄金比方程式」と呼んでいました）の2つの解なので，よく似た性質があります。1，ω，ω^2 によって 1 の3乗根が表せるのに対し，ϕ は1の5乗根（$x^5=1$の解）を表すことができ，1の5乗根は，複素数平面上で，原点中心・半径１の **円に内接する正五角形の頂点** を表すことが知られています。

次回は，正五角形の面積と正十二面体の体積 を黄金比 ϕ で表すことにチャレンジします。