「黄金比 Φ」とは？（第７回）

“K.G Cafe Phi Φ”— “Φ（ファイ）” ＝「黄金比」の話の７回目です。

□ 黄金比と三角関数（続）

（1） 前回，cos36° と cos72°のことを取り上げ，それぞれ $\dfrac{\phi}{2},\ \dfrac{\phi-1}{2}\left(=\dfrac{1}{2\phi}\right)$ と表されることを示しました。この2つには，　$\cos 36^\circ \times \cos 72^\circ = \dfrac{\phi}{2}\times\dfrac{1}{2\phi}=\dfrac{1}{4}$　という関係もあります。

三角関数は，様々な性質があり，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　は代表的な公式で，

$\cos 36^\circ=\cos(90^\circ-54^\circ)=\underline{\sin 54^\circ=\dfrac{\phi}{2}}$ ，$\cos 72^\circ=\cos(90^\circ-18^\circ)=\underline{\sin 18^\circ=\dfrac{\phi-1}{2}}$　となります。

54° は 18° の 3倍です。ですから，ここでは三角関数の 3倍角公式（$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$）に代入して確かめてみましょう。

$$\sin 54^\circ=3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ=\frac{3(\phi-1)}{2}-\frac{4(\phi-1)^3}{8}=\frac{3\phi-3-(2\phi+1)+3(\phi+1)-3\phi+1}{2}=\frac{\phi}{2}$$

となって，正しいことが確かめられました。$\phi^2=\phi+1$，$\phi^3=\phi(\phi+1)=\phi+1+\phi=2\phi+1$ を使っています。

（2）　それでは，sin36°，sin72°　はどのように表されるのでしょうか。

三角関数で最も重要な関係式　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　（「三平方の定理」といってもよい）を使います。

$\sin^2 36^\circ=1-\cos^2 36^\circ=1-\left(\dfrac{\phi}{2}\right)^2=\dfrac{4-(\phi+1)}{4}=\dfrac{3-\phi}{4}$，$\sin 36^\circ>0$ ですから，$\underline{\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{2}}$

cos36°に比べるとすっきりしませんが，もし ϕ を使わないで書くと，$\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ となり複雑です。

$\sin 72^\circ=1-\cos^2 72^\circ=1-\left(\dfrac{\phi-1}{2}\right)^2=\dfrac{4-(\phi+1-2\phi+1)}{4}=\dfrac{2+\phi}{4}$，正だから，$\underline{\sin 72^\circ=\dfrac{\sqrt{2+\phi}}{2}}$

もし ϕ を使わないで書くと，$\sin 72^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$　となり，sin36° との関係性が見出せます。

$\sin 36^\circ\times\sin 72^\circ=\dfrac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{16}=\dfrac{\sqrt{80}}{16}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　という関係です。ϕ を使っても確かめられます。

山脇の超数学講座 No. 16

□ 三角関数と単位円，黄金比

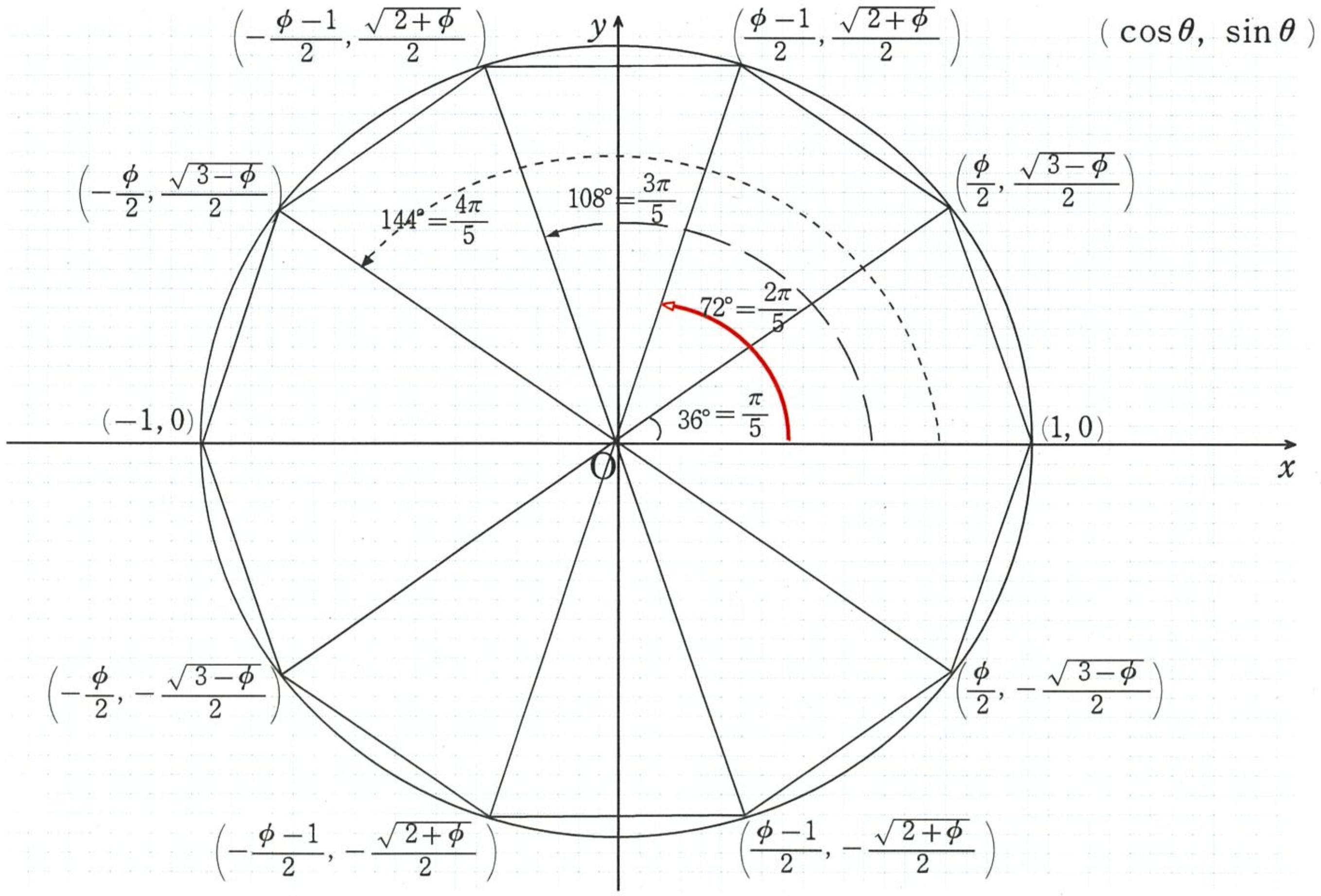
今回，cos36°，cos72°に続いて，sin36°，sin72°の値を求めました。これらの値を，座標平面で，原点を中心とした半径１の円（「**単位円**」という）周上の点の座標にとってみましょう。

ここで，**弧度法**を導入します。半径１の円の円周の長さは，円周率をπ（＝3.14…）とすると，2π です。円を1周すると360°ですから，$360^\circ=2\pi$ と定義します。すると，$180^\circ=\pi$　で，$36^\circ=\dfrac{\pi}{5}$ となります。

$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\phi}{2}$，$\cos 72^\circ=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\phi-1}{2}$ と書けます。$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$　より，

$\cos\dfrac{3}{5}\pi=\cos 108^\circ=-\cos 72^\circ=-\dfrac{\phi-1}{2}$ ，$\cos\dfrac{4}{5}\pi=\cos 144^\circ=-\cos 36^\circ=-\dfrac{\phi}{2}$ などと表現できます。

x 軸の正の方向から反時計回りに θ だけ回転したところの円周上の点の座標は，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ なのです。これにより，$\left(\cos\dfrac{\pi}{5},\ \sin\dfrac{\pi}{5}\right)$，$\left(\cos\dfrac{2\pi}{5},\ \sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$，$\left(\cos\dfrac{3\pi}{5},\ \sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$……と順に点をとっていくと下図のようになります。



こうして，原点を中心とした**半径１の円に内接する正十角形の頂点の座標**がすべて黄金比 ϕ で表せたことになります。次回は，複素数平面と三角関数・黄金比について，追究したいと思います。