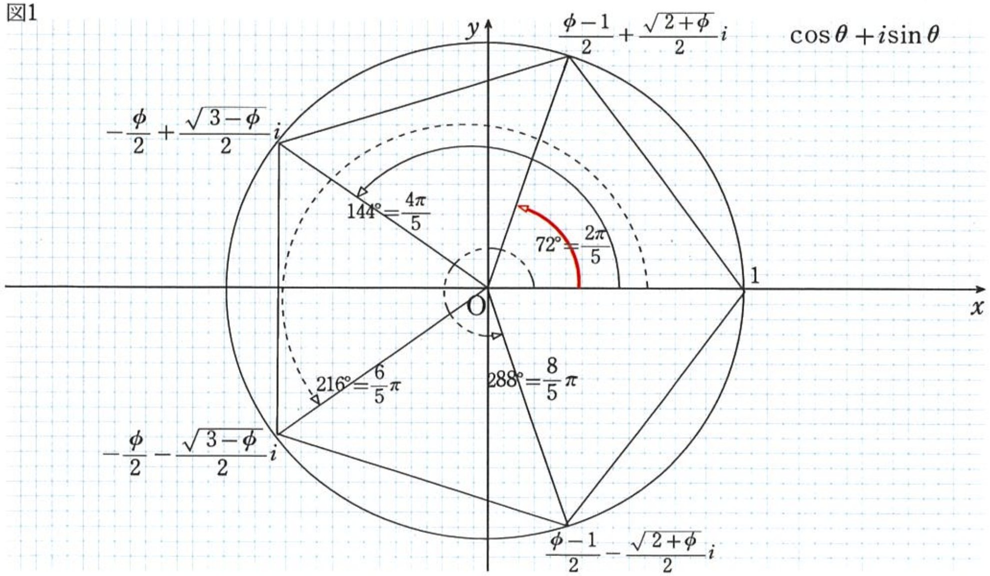
「黄金比　Φ」とは？（第９回）

"K.G Cafe Phi Φ"— "Φ（ファイ）" ＝「黄金比」の話の９回目です。

□　三角関数と複素数平面（続）

前回の最後に，1の5乗根が，複素数平面上で，原点中心・半径1の円に内接する正五角形の頂点を表し，しかもそれらは黄金比ϕで表現できると述べましたが，実際には以下のようになります。

図1



これを，ϕを用いずに書くと，１の5乗根は，１，　$\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$，

$\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$，　$\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$，

$\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$　となります。やや複雑ですが，図1のように複素数平面上の対称的な位置に配置されるのです。可能ならば，前々回の「超数学」＝「黄金比とは？（第7回）」も参照して下さい。

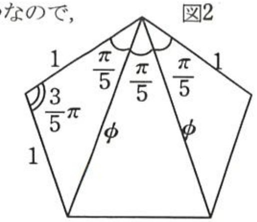
さて，今回は，正五角形の面積と，すべての面が正五角形からなる正十二面体の体積を，黄金比ϕを用いて表すことにチャレンジしてみましょう。

山脇の超数学講座　No. 18

□　正五角形の面積・正十二面体の体積と黄金比

1辺の長さが1の正五角形の面積を求めます。図2のように，対角線の長さはϕなので，面積をSとすると，

図2



$$S=2\times\frac{1}{2}\times1^2\sin\frac{3}{5}\pi+\frac{1}{2}\times\phi^2\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{2}{5}\pi+\frac{\phi^2\sqrt{3-\phi}}{4}$$

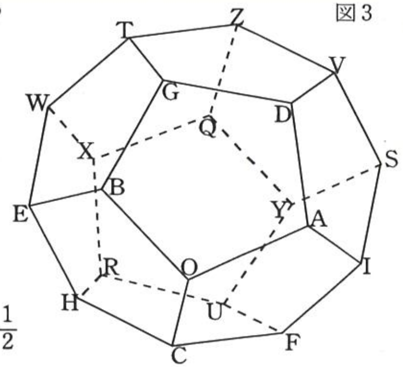
$$=\frac{2\sqrt{2+\phi}}{4}+\frac{\phi\sqrt{2+\phi}}{4}=\frac{(2+\phi)\sqrt{2+\phi}}{4}=\frac{1}{4}(\phi+2)^{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(*)$$

と見事にϕで表すことができました。

ϕを用いずに書くと，$S=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdots$① となります。

次は，1辺の長さが１の正五角形の面からなる正十二面体の体積を求めます。図３において，E, O, D, Tは正方形をつくる。この1辺の長さは，正五角形の対角線の長さであり，ϕである。この正方形を1つの面とする立方体（立方体$EODT-RFSQ$）の体積V_1は，

図３



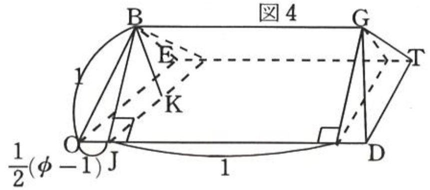
$$V_1=\phi^3=\phi\cdot\phi^2=\phi(\phi+1)=2\phi+1$$

図4で，　$BJ^2=1^2-\frac{1}{4}(\phi-1)^2=\frac{1}{4}(\phi+2)$，

$$BK^2=BJ^2-JK^2=\frac{1}{4}(\phi+2)-\left(\frac{1}{2}\phi\right)^2=\frac{1}{4},\quad\therefore BK=\frac{1}{2}$$

図４の立体の体積をV_2とすると，

図４



$$V_2=2\times\frac{1}{2}(\phi-1)\times\phi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\phi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1$$

$$=\frac{1}{6}(\phi^2-\phi)+\frac{1}{4}\phi=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\phi$$

よって，正十二面体の体積をVとすると，

$$V=V_1+6V_2=2\phi+1+6\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\phi\right)$$

$=\frac{7}{2}\phi+2\cdots\cdots(**)$　，ϕを使わなければ，　$V=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\cdots\cdots$②

以上のように，正五角形の面積，正十二面体の体積を，ϕを用いて表すことができました。途中計算で，これまでに明らかにしてきたϕの性質が駆使されていることがわかるでしょう。