「黄金比　Φ」とは？ (第５回)

新食堂の名前，“ K.G Cafe Phi Φ ” ―この “Φ（ファイ）” にちなんだ話の５回目になります。ϕ は数学では「**黄金比**」を表します。

□　自然界と黄金比

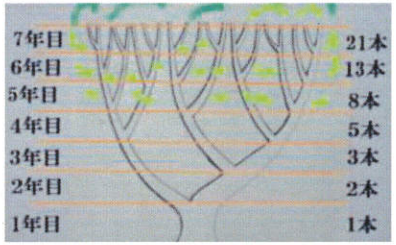


図１

前回登場した「**フィボナッチ数列**」の名前の由来となったのは，13 世紀に活躍したイタリアの数学者**レオナルド・フィボナッチ**（1180 頃～1250 頃）である。フィボナッチは『計算の書』を著わし，当時の最先端の数学を紹介した。その中で次のような計算問題を出題した。

「ウサギのつがいが生まれた。このつがいは成長して親になるのに１か月かかり，２か月目からは毎月つがいを産む。生まれたつがいも１か月かかって成長して，２か月目から毎月つがいを産む。この場合，12 か月目にはウサギは何つがいになっているだろうか？」

答えは，ウサギのつがいの数は，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144…となって，12 か月目には，144 つがいになる，というのだ。ここにはウサギの図は載せていないが，同じようなことは樹の「枝分かれ」にも見出せる。**１本**の木が１年かかって成長し，２年目には１本が枝分かれして，**２本**の枝になる。３年目には幹からまた枝分かれするので **3 本**になる。４年目には，２年目に分かれた枝から１本枝分かれ，幹からも枝分かれするので，合計 **5 本**になる。５年目には，２年目，３年目に分かれた枝からそれぞれ１本ずつ枝分かれ，幹からも枝分かれするので，合計 **8 本**になる。…（図１）こうして，枝の数は見事にフィボナッチ数列をつくっていくのだ。細胞分裂も同様である。細胞は分裂して２倍，４倍，８倍…というようには増えない。必ず元の幹細胞があり，分裂した細胞は成長してから分裂するので，樹の枝分かれのようにフィボナッチ数列をつくりながら増加している。そして，隣り合うフィボナッチ数は，大きくなればなるほどその比が 1.618…，つまり**黄金比** に近づいていく。これは次のように説明できる。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

nを無限大(∞)にすると$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$は0に近づいていく。

山脇の超数学講座 No. 14

□　黄金比を解に持つ４次方程式，そして４次関数

前回　$\phi,\ \frac{1}{\phi},\ -\phi,\ -\frac{1}{\phi}$　を解に持つ４次方程式は，$x^4-3x^2+1=0$ ……①

であり，数直線上で黄金比を考えたときの「**黄金比方程式**」と名づけた。

今回は　$f(x)=x^4-3x^2+1$　とおいて，この４次関数を考えてみよう。

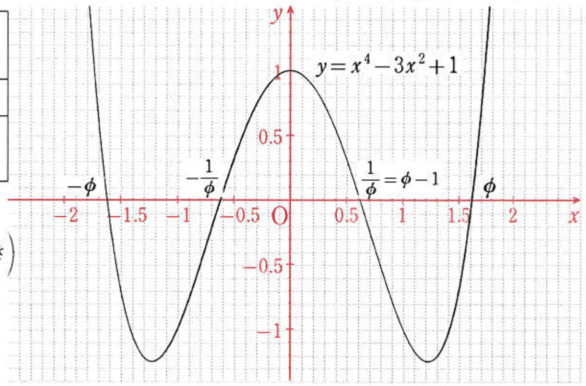
$f(-x)=f(x)$ であり，この関数は偶関数（グラフが y 軸に関して対称）であるので，

$x\geqq 0$ のみ考えてみよう。　$f'(x)=4x^3-6x=2x(2x^2-3)=4x\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

x	0	…	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	…
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

極大値　1（$x=0$のとき）

極小値 $-\frac{5}{4}$ $\left(x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\text{のとき}\right)$



この４次関数のグラフは，x 軸の正の部分，負の部分をそれぞれ黄金比分割している。これは「**黄金比分割４次関数**」ということができ，美しい形をしている。さらに　$x^4-3x^2+1=0$ を考える。

$x^4-3x^2+1=0$　　両辺を　$x^2\neq 0$　で割って，

$$x^2-3+\frac{1}{x^2}=0 \iff \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5 \iff x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$$

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5} \qquad\qquad x+\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$$

$$x^2-\sqrt{5}\,x+1=0 \qquad\qquad x^2+\sqrt{5}\,x+1=0$$

$$x=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}=\phi,\ \frac{1}{\phi} \qquad\qquad x=\frac{-\sqrt{5}\pm 1}{2}=-\phi,-\frac{1}{\phi}$$

こうして，ϕ　と　$\frac{1}{\phi}=\phi-1$　をもつ２次方程式をつくることができたのである。

次回は，「黄金比と三角関数」について考えてみたい。