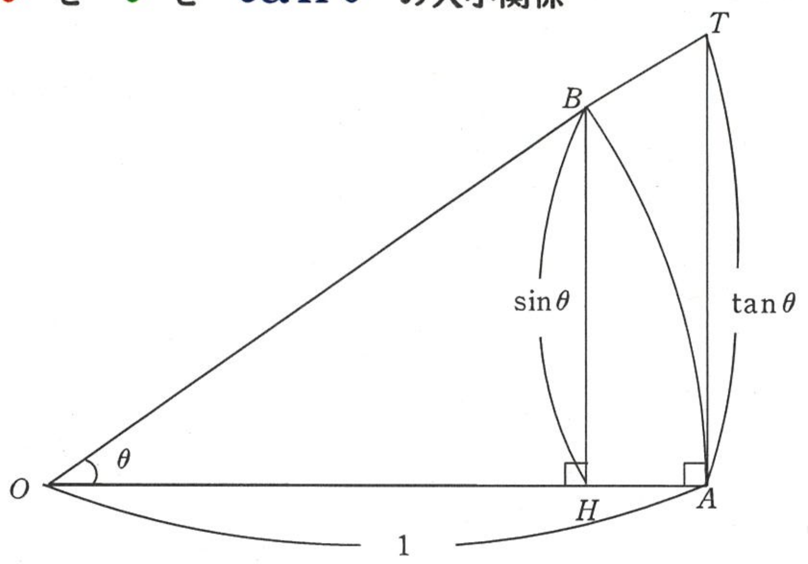
三角関数のグラフの話

□ $\sin\theta$ と θ と $\tan\theta$ の大小関係

図1



今，図1のように半径1，中心角 θ の扇形 OAB を考える。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ （$=90°$，πは$180°$にあたる。）

まず，$BH=\sin\theta$，$\overset{\frown}{AB}=\theta$ 。点 A にて円に接線を引いて，直線 OB との交点が T である。
$\angle OAT=\frac{\pi}{2}$ だから，$AT=\tan\theta$ となる。直観的に見て，$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ となりそうである。
しかし，これは厳密ではない。　面積で比較すると，それははっきりする。

$\triangle OHB$，扇形 OAB，$\triangle OAT$ の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とおくと，

$S_1=\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$，$S_2=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{1}{2}\theta$，　同様に，$S_3=\frac{1}{2}\tan\theta$

図1より明らかに，$S_1<S_2<S_3$ 　だから，上の式より，$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ …① 　が示された。

ここからが **三角関数の極限** に関わってくる重要な話である。　①の式を書きかえると，

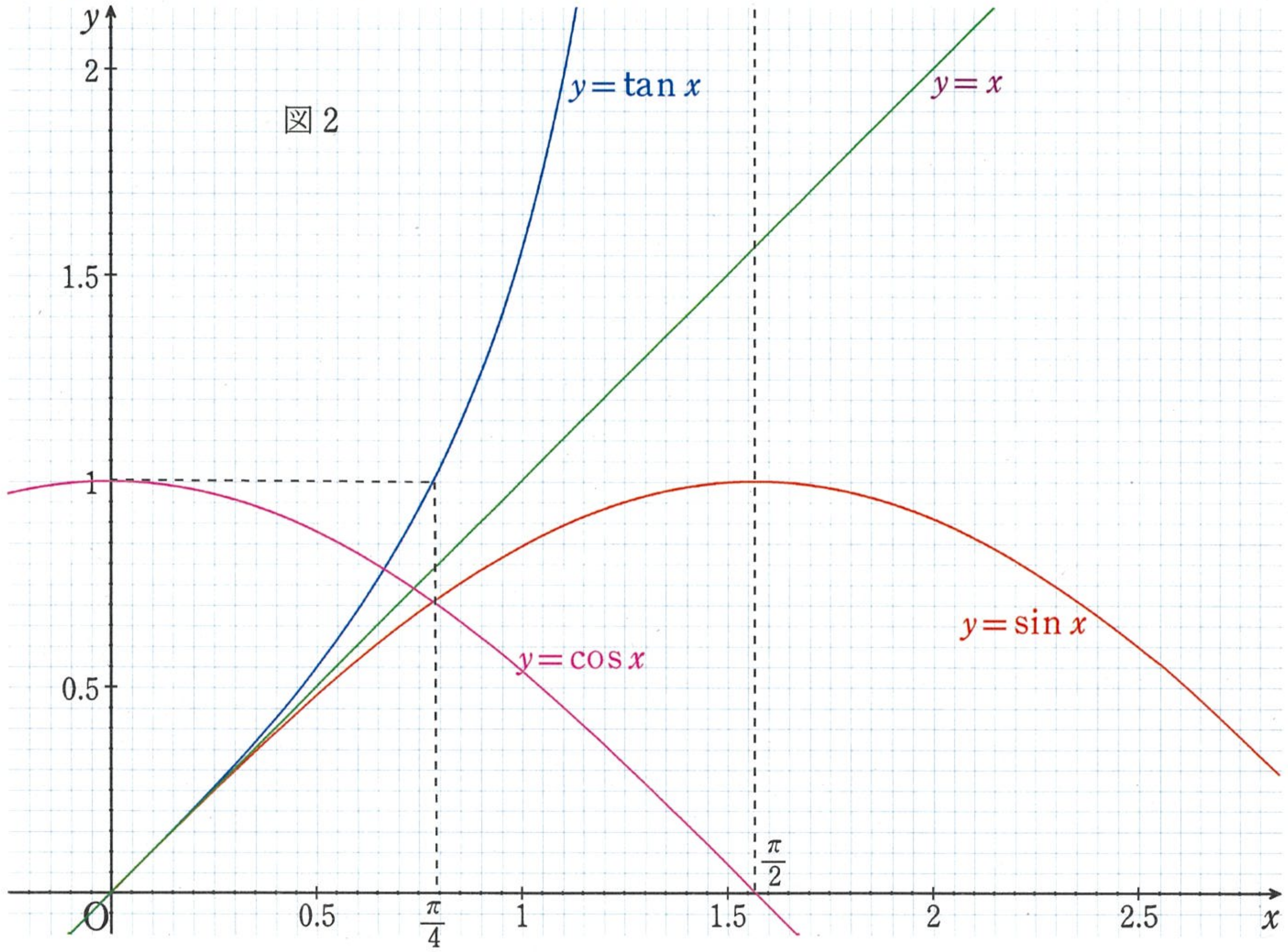
$\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 　　この不等式の辺々を $\sin\theta$ (>0) 　で割ると，

$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$ ，さらに，すべて正の数だから辺々の逆数をとると，$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$ …②
という大小関係が生まれる。ここで，θ を，正の値をとらせながら限りなく0に近づけると，
$\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$ であるから，②の不等式で「**はさみうちの原理**」によって，すなわち，
②の関係が成り立ちつつ，$\cos\theta$ が限りなく1に近づくならば，$\frac{\sin\theta}{\theta}$ は1に近づかざるを得ない。

これを $\boxed{\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1}$ …(＊) と書き，三角関数の極限値のうち最も重要なものとなる。$\theta<0$ のときも，$\theta=-t$ とおけば，$\theta\to-0$ で $t\to+0$ であり，$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sin(-t)}{-t}=\frac{\sin t}{t}\to1$ となるのである。

山脇の超数学講座 No. 24

□ $y=\sin x$，$y=x$，$y=\tan x$ のグラフの関係



(＊) の極限により，$y=\sin x=f(x)$ の導関数を求めてみると，

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2}{h}\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}=\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$$ で，

$y=\sin x$ の原点 O における接線の傾きは，$f'(0)=\cos0=1$，つまり，直線 $y=x$ と曲線 $y=\sin x$ は原点にて接している。　$y=\tan x=g(x)$ の導関数を求めてみると，やはり (＊) の極限により，

$$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}-\tan x\right)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan h+\tan^2x\tan h}{1-\tan x\tan h}\right)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\tan h}{h}\cdot\frac{1+\tan^2x}{1-\tan x\tan h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos h}\cdot\frac{1}{1-\tan x\tan h}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$$ で，

$y=\tan x$ の原点 O における接線の傾きは，$g'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}=1$，つまり直線 $y=x$ と曲線 $y=\tan x$ は原点にて接している。$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ 　の関係はグラフで見ると，図2のようになる。
$y=\sin x$，$y=x$，$y=\tan\theta$ については，極限，導関数とも $\cos x$ が常に役割を果たしていることがわかる。