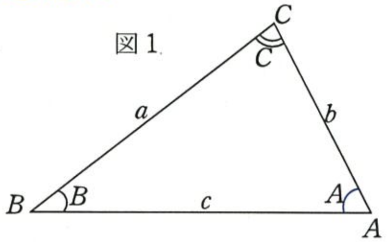
三角比の応用 I　正弦定理

□　すべての三角形で成り立つ正弦定理とは？

18世紀の偉大な数学者レオンハルト･オイラー（1707～1783）は，三角形の $\angle A,\ \angle B,\ \angle C$ の大きさを単に $A,\ B,\ C$ で表し，その向かいにある辺（対辺）の大きさを $a,\ b,\ c$ で表した。

図 1



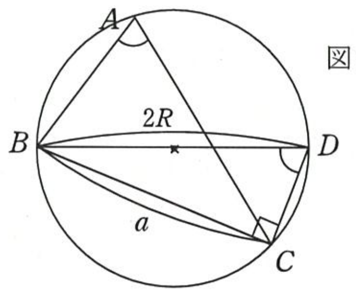
これにより,すでに知られていた**三角比**（$\sin A,\ \cos A,\ \tan A$）に関する定理「**正弦定理**」,「**余弦定理**」,「**面積の公式**」などが見事な調和をもって関連づけられたのである。

三角比を用いた「三角法」は測量術だけでなく，航海術でも利用されるようになり，実用数学の典型となったが，微分積分学の進展に伴って「**三角関数**」への需要が高まった。ここで，円を用いた一般角θ（回転角θ）に対して三角関数を定義したのもオイラーである。$\sin A,\ \cos A,\ \tan A$ から $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ への進化であるが，オイラーは三角関数の **円関数** としての定義を明確にし，$\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ の表現を定着させ，三角関数の微分積分法をわかりやすく，しかも容易にした。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R としたとき，

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \cdots\cdots Ⓐ}$$ が成り立つ。

図 2



証明　図 2 のように，頂点 B を通る$\triangle ABC$ の外接円の直径を BD とすると，円周角の定理から　$\angle BDC=A,\ \angle BCD=90^\circ$

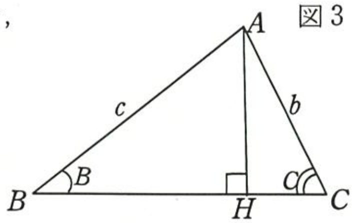
よって，$a=2R\sin\angle BDC=2R\sin A$ …… ①

図 2 は，$0^\circ<A<90^\circ$（$\triangle ABC$ が鋭角三角形）の場合であるが，$A=90^\circ$（直角三角形），$90^\circ<A<180^\circ$（鈍角三角形）の場合も，①が成り立つことが証明できる。（ここでは略）

①の両辺を $\sin A\,(>0)$ で割ると，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立ち，同様に $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ も成り立つので，すべての三角形について，Ⓐ が成り立つことが証明された。 終

別証明　$\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に垂線 AH をおろしたとき，$AH=c\sin B$，また，$AH=b\sin C$ と表されるところから，$c\sin B=b\sin C$，両辺を $\sin B\sin C\,(>0)$ で割ると，

図 3



$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，　同じように，$a\sin B=b\sin A$ より，

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，　ゆえに Ⓐ の $2R$ を除く部分が証明された。 終

Ⓐを，比を用いて表現すれば，$\boxed{a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C \cdots\cdots Ⓑ}$ となる。

山脇の超数学講座 No. 20

□　正弦定理を活用して問題を解く

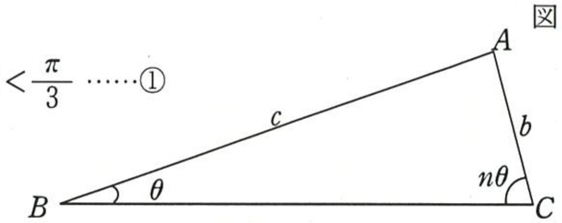
正弦定理を用いて，実際の問題を解いてみましょう。2020 年の大阪大学・理系の問題です。

問題　n を 2 以上の自然数とする。三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle ACB=n\angle ABC$ であるとき，$c<nb$ を示せ。

証明

$\angle ABC=\theta$ とおくと，題意より，$\angle ACB=n\theta$

図 4



$n+1\geqq 3$ より，$3\theta\leqq(n+1)\theta<\pi$ だから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ ……①

正弦定理より，

$\dfrac{c}{\sin n\theta}=\dfrac{b}{\sin\theta}$　つまり，$c=\dfrac{b\sin n\theta}{\sin\theta}$

証明すべき不等式は　$c<nb$ ……(*)　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{b\sin n\theta}{\sin\theta}<nb$　$\Leftrightarrow$　$0<\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n$ ……(**)

(*) と (**) は同値である。

[1] $n=2$ のとき，(**) において，$1<\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta<2$　（∵ ①）　ゆえに，(*) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(*) が成り立つ，つまり，$c<kb$ ……② を仮定する。

$n=k+1$ のとき，$c<(k+1)b$ …… ③ を示せばよい。

ところが，$n=k$ のときの $\triangle ABC$ で，

正弦定理より，$\dfrac{b}{\sin\theta}=\dfrac{BC}{\sin\{\pi-(k+1)\theta\}}=\dfrac{BC}{\sin(k+1)\theta}$，　式変形すると，$\dfrac{BC}{b}=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ ……④

さらに，三角形の成立条件より，$BC<c+b<kb+b=(k+1)b$ ……⑤　（∵ ②）

⑤の両辺を $b\,(>0)$ で割ると，$\dfrac{BC}{b}<k+1$，これと④より，$0<\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}<k+1$ ……⑥

⑥と③は同値だから，$n=k+1$ のときも，③（すなわち (*)）が成り立つことを示すことができた。

したがって，数学的帰納法により，$n=2,3,4,\cdots\cdots$ において，$c<nb$ が成り立つ。 終

《解説》正弦定理を角と辺の関係に活用して，数学的帰納法により証明した解であった。以下の別解は，三角関数の微分法を利用したもので非常に簡潔である。これは数学Ⅲを学習すれば理解できる。

別解　①までは同じ。$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると，$nb-c=2R(n\sin\theta-\sin n\theta)$

$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta$ とおくと，$f'(\theta)=n(\cos\theta-\cos n\theta)$，①で，$0<\theta<n\theta<\pi$ であり，この区間では，$\cos\theta>\cos n\theta$，よって，$f'(\theta)>0 \Longrightarrow f(\theta)>f(0)=0$ より，$nb>c$ 終