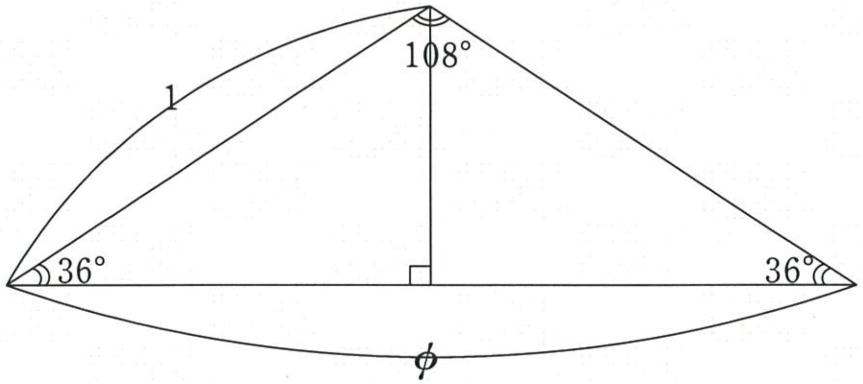
「黄金比 Φ」とは？（第6回）

新食堂の名前，“ K.G Cafe Phi Φ ” ― この“Φ（ファイ）”にちなんだ話の6回目になります。ϕ は数学では「**黄金比**」を表します。

□ 黄金比と三角関数

図1



今回は，黄金比と三角比の関係を探ってみましょう。

図1は，「黄金比ϕ（第3回）」に登場した「黄金三角形（弟）」です。これは等しい辺の長さが1で，底辺の長さが ϕ の二等辺三角形でしたね。

ここで頂角より底辺に垂線を下すと，斜辺の長さが1，底辺の長さが $\frac{\phi}{2}$ の直角三角形ができあがります。そこに三角比の定義をあてはめれば，

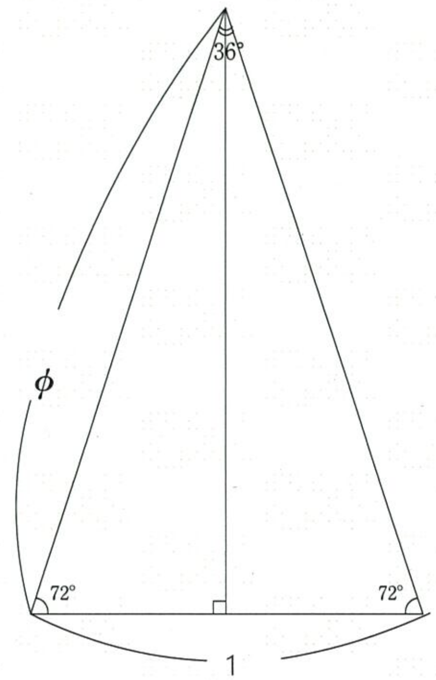
$\cos 36^\circ = \dfrac{\frac{\phi}{2}}{1} = \dfrac{\phi}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ と求められます。三角比は余弦（ cos ）でいうと，

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ などが覚えておかなければならない三角比ですが，$\cos 36^\circ$ が黄金比と関係していて，このように簡単に求められるのです。

図2は，やはり第3回に登場した「黄金三角形（兄）」です。これは等しい辺の長さがϕ で，底辺の長さが1の二等辺三角形でした。頂角より底辺に垂線を下すと，斜辺の長さが ϕ，底辺の長さが $\frac{1}{2}$ の直角三角形ができあがります。

山脇の超数学講座 No. 15

図2



$\cos 72^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{\phi} = \dfrac{1}{2\phi} = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ と求められます。

これまでたびたび登場しましたが，$\dfrac{1}{\phi} = \phi - 1$ ですので，$\cos 72^\circ = \dfrac{1}{2}(\phi - 1)$

とも書けます。$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \dfrac{1}{2}$ です。 なかなか美しい関係でしょう。

三角関数の倍角公式（ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ）を用いると，次のように確かめられます。

$\cos 72^\circ = 2\cos^2 36^\circ - 1 = 2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{\phi^2}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}(\phi+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(\phi - 1)$

ここでは $\phi^2 = \phi + 1$ を使いました。そして，さらにすごいことに，下の図3のように，

$\cos 36^\circ : \dfrac{1}{2} = \dfrac{\phi}{2} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{2\phi} = \dfrac{1}{2} : \cos 72^\circ = \phi : 1$ となっており，

$\cos 36^\circ$ と $\cos 72^\circ$ を数直線上にとると，見事に「黄金比分割」しているのです。

この2つの三角比（三角関数）はぜひ覚えておいてください。次回も三角関数です。

図3