山脇の超数学講座　No.3

人類の至宝＝オイラーの公式

今回は，前回の「**一番美しい等式**」 $\boxed{e^{i\pi}+1=0}$ のもとになった

やはり数学者**オイラー** が発見した「**オイラーの公式**」を紹介しましょう。

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\ \sin x}$$

この公式は，今や複素解析をはじめとする純粋数学の様々な分野や、電気工学・物理学などで現れる微分方程式の解析において重要な役割を演じるなど，さまざまな分野で必須の式であり，自然界のしくみを解き明かすうえでなくてはならないものになっている。アメリカの著名な物理学者**リチャード・ファインマン**（Richard Phillips Feynman，1918〜1988）は，この公式を“This is our jewel.”（**人類の至宝**）かつ「**すべての数学のなかでもっとも素晴らしい公式**」 だと述べている。

指数関数 e^x や，三角関数の sin x，cos x は，x の多項式で表すことができる。単に多項式ではなく，次に示したように，項の数が無限に続く多項式（無限級数）になる（「マクローリン展開」，Maclaurin series ）。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots \qquad (*)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ldots \qquad (**)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\ldots \qquad (***)$$

次に虚数単位 i の登場だ。オイラーは，「式(*)に，$x=i$ を代入したものを e^i の定義とする」と決め，$i^2=-1$，$i^3=i\cdot i^2=-i$，$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$，$i^5=i\cdot i^4=i$，…… を踏まえ，(**)，(***)に代入したものも合わせて，次の公式を導いたのだ。

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{ix^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ldots$$

$$=\ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\ldots$$

$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ldots\right)\ =\ \cos x+i\sin x$$

「**オイラーの公式**」で $x=\pi$ を代入すれば，$\cos\pi=-1$，$\sin\pi=0$ より，直ちに「**オイラーの等式**」を導くことができることを確認しておこう。

スイスの第 6 次紙幣（1976〜1979 にかけて発行）の 10 フラン紙幣の表に登場したオイラーの肖像
https://ja.wikipedia.org/wiki