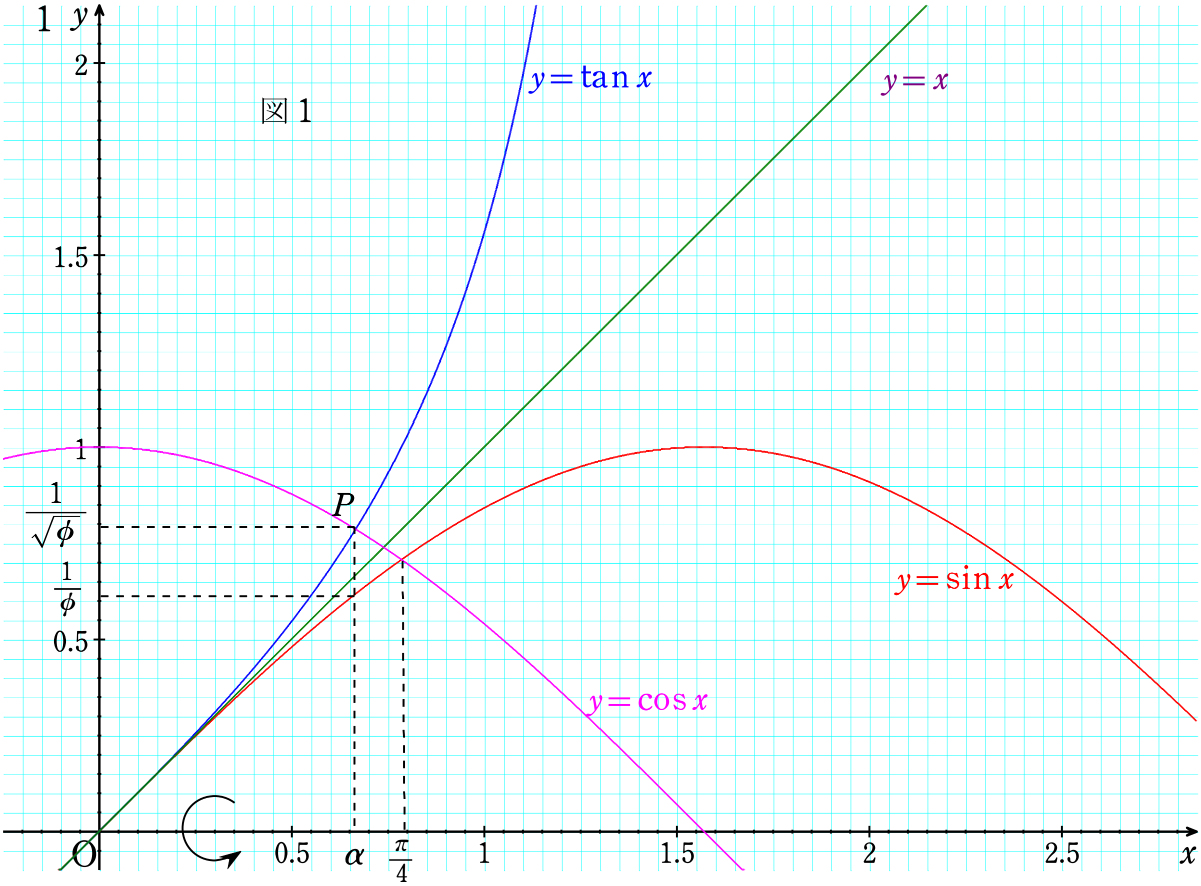
三角関数&黄金比 Awakened

□ $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ のグラフと回転体の体積



第1象限での $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ のグラフは，2曲線 $y=\sin x$, $y=\tan x$ が原点において接し，2 曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x$ は，点 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で交わっている。

さらに， $\cos x=\tan x \cdots ①$ $\Leftrightarrow$ $\cos x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\Leftrightarrow$ $\cos^2 x=\sin x \cdots ②$ $\Leftrightarrow$ $1-\sin^2 x=\sin x$， $\sin x=t$ とおくと， $t^2+t-1=0$ かつ $t>0$ より，

$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，ここで 黄金比 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いれば， $\sin x=\dfrac{1}{\phi}$ となり，

①,② より， $\cos x=\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{\phi}} \cdots ③$ となる。ここでいったん $\sin\alpha=\dfrac{1}{\phi}$ と定めれば，

2 曲線 $y=\cos x$, $y=\tan x$ は，点 $P\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\sqrt{\phi}}\right)$ で交わることになる（超数学No.32）。

山脇の超数学講座 No. 77

私は，第1象限で3つのグラフに囲まれた図形を「**黄金比トライアングル**」と呼んだ。今回，「黄金比トライアングル」を x **軸の周りに1回転してできる立体の体積** V_x を求めてみたい。

$$\frac{V_x}{\pi}=\int_0^{\alpha}\tan^2 x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx,$$ 別々に計算する。 $\frac{1}{\phi}=\phi-1$ を使う。

$$\int_0^{\alpha}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\alpha}=\tan\alpha-\alpha=\sqrt{\frac{1}{\phi}}-\alpha=\sqrt{\phi-1}-\alpha,$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

ここで， $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\phi\sqrt{\phi}}=2\left(\frac{\phi-1}{\sqrt{\phi}}\right)=2(\sqrt{\phi}-\sqrt{\phi-1})$,

よって， $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx==\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\alpha-\sqrt{\phi}+\sqrt{\phi-1}\right)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right),$$ 以上より，

$$\frac{V_x}{\pi}=\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{\phi-1}-2\alpha+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\alpha-\sqrt{\phi}+\sqrt{\phi-1}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\},$$

したがって， $\underline{V_x=\frac{\pi}{2}(3\sqrt{\phi-1}-\sqrt{\phi}+1-3\alpha)}$ ，ただし，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi-1=\frac{1}{\phi}$ ，

「黄金比トライアングル」を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 もまた，黄金比ϕを用いて表すことができたのである。ここで $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Arcsin}\,x$ を用いて表すと，

$\sin\alpha=\phi-1 \iff \alpha=\mathrm{Arcsin}(\phi-1)$ と書けるので，

$\underline{V_x=\frac{\pi}{2}\{3\sqrt{\phi-1}-\sqrt{\phi}+1-3\mathrm{Arcsin}(\phi-1)\}}$ となり，黄金比との関係が明確になる。

またϕを使わなければ， $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$， $\phi-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(=\frac{1}{\phi}\right)$ なので，

$\underline{V_x=\frac{\pi}{2}\left\{3\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+1-3\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}}$ と表現される。

また，**「黄金比トライアングル」を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積** V_y を求めることを試みたが，そこで $\int x\tan x\,dx$ という初等関数では表現できない積分が登場したので，今回は断念した。準備して，可能ならば別の機会に発表したいと思う。 以上