

フィボナッチ数列の奇数項



【問題】 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1, p_2=2, p_{n+2}=\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ①}$$

- (1) $\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。
- (2) すべての $n=2, 3, 4, \dots$ に対し, $p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。
- (3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1, q_2=1, q_{n+2}=q_{n+1}+q_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

すべての $n=1, 2, 3, \dots$ に対し, $p_n=q_{2n-1}$ を示せ。 (2015, 東京大学)

$$(1) \quad \text{【証明】} \quad a_n=\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n} \text{ とおく。}$$

$$a_{n+1}=\frac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\right)^2+p_{n+1}^2+1}{\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n} \cdot p_{n+1}}, \quad \text{分母・分子を } p_{n+1}^2+1 \text{ で割ると}$$

$$a_{n+1}=\frac{\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n^2}+1}{\frac{p_{n+1}}{p_n}}=\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=a_n \quad \text{から, } a_n \text{ は } n \text{ によらず一定となる。}$$

$$\text{しかもその値は, } a_n=a_{n-1}=\dots=a_2=a_1=\frac{2^2+1^2+1}{2 \cdot 1}=3 \quad \text{である。} \quad \text{【終】}$$

$$(1) \quad \text{【別解】} \quad \frac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}-\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+2}^2+p_{n+2}p_n}{p_{n+2}p_{n+1}}-\frac{p_n^2+p_{n+2}p_n}{p_{n+1}p_n}$$

$$=\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}-\frac{p_n+p_{n+2}}{p_{n+1}}=0, \quad \text{ゆえに,}$$

$$\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_n^2+p_{n-1}^2+1}{p_np_{n-1}}=\dots=\frac{p_2^2+p_1^2+1}{p_2p_1}=3 \quad \text{で } n \text{ によらず一定。} \quad \text{【終】}$$

$$(2) \quad p_{n+1}+p_{n-1}=\frac{p_n^2+1}{p_{n-1}}+p_{n-1}=\frac{p_n^2+p_{n-1}^2+1}{p_{n-1}}=3p_n \quad (\because (1) \text{の結果より})$$

$$\therefore \underline{p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n} \quad \text{【答】}$$

$$(2) \quad \text{【別解】} \quad (1) \text{の結果より,} \quad p_{n+1}^2+p_n^2+1=3p_{n+1}p_n \quad \text{..... ②}$$

$$p_n^2+p_{n-1}^2+1=3p_np_{n-1} \quad \text{..... ③}$$

$$\text{②}-\text{③より,} \quad (p_{n+1}-p_{n-1})(p_{n+1}+p_{n-1})=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$$

$p_{n+1}=p_{n-1}$ とすると, ①より, $p_{n-1}^2=p_n^2+1$ となつて不適 ($n=2$ で不成立)。

ゆえに, $p_{n+1}-p_{n-1} \neq 0$, よつて, $\underline{p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n}$ 【答】 ($n=2, 3, 4, \dots$)

山脇の超数学講座 No. 76



(3) $p_n = q_{2n-1} \cdots (*)$ とおく。 [$q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$, $q_1 = q_2 = 1$]

証明 [1] $n=1$ のとき, $p_1=1$, $q_1=1$ であるから $(*)$ は成り立つ。

$n=2$ のとき, $p_2=2$, $q_3=q_2+q_1=1+1=2$ であるから $(*)$ は成り立つ。

[2] $n=k$, $k+1$ のとき, $(*)$ が成り立つ, すなわち $p_k = q_{2k-1}$, $p_{k+1} = q_{2k+1}$ であると仮定する。 $n=k+2$ のときを考えると, (2) の結果より,

$$\begin{aligned} p_{k+2} &= 3p_{k+1} - p_k = 3q_{2k+1} - q_{2k-1} = 3(q_{2k} + q_{2k-1}) - q_{2k-1} \\ &= 3q_{2k} + 2q_{2k-1} = q_{2k} + 2(q_{2k} + q_{2k-1}) = q_{2k} + 2q_{2k+1} \\ &= q_{2k+2} + q_{2k+1} = q_{2k+3} \quad \text{となつて, } n=k+2 \text{ のときも } (*) \text{ は成り立つ。} \end{aligned}$$

[1], [2] から, すべての自然数 n について, $(*)$ は成り立つ。 **終**

解説 これで「2015, 東京大学」の問題は解決したが, 振り返ってみると,

(3) で登場した $\{q_n\}$ は「フィボナッチ数列」そのものであり, $p_n = q_{2n-1}$ ということは, $\{p_n\}$ は「フィボナッチ数列の奇数項の数列」で, ①のような性質があり, (1), (2) の性質が導かれることになる。ここで, 「山脇の超数学No.72」を振り返る。

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定め,

$n \geq 2$ に対して, $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ。(以下略) (2025, 東京科学大学)

結論は, $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n \cdots \cdots ④$, 「フィボナッチ」では, 常にこの等式が成立する。

フィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$ において,

奇数項が中項では, $55 \times 21 - 34^2 = -1$ (34は第9項), 偶数項が中項では, $89 \times 34 - 55^2 = 1$ (55は第10項)

今回の東大の問題で示されたことは, 奇数項だけを取り出して, この計算をすると,

たとえば, 第9項, 第11項, 第13項で, $q_{13} \cdot q_9 - q_{11}^2 = 233 \times 34 - 89^2 = 1$ が成り立つ。

つまり, $q_{2n+3} \cdot q_{2n-1} - q_{2n+1}^2 = 1 \cdots \cdots (**)$ が成り立つ。これが, $p_{n+2} \cdot p_n - p_{n+1}^2 = 1$

$$\Leftrightarrow p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad \text{なのである。} \quad (**) \text{ は証明できる。}$$

$$\begin{aligned} \text{〔証明〕 } (**) \text{ の左辺} &= (q_{2n+2} + q_{2n+1})q_{2n-1} - q_{2n+1}^2 = q_{2n+2} \cdot q_{2n-1} + q_{2n+1} \cdot q_{2n-1} - q_{2n+1}^2 \\ \langle ④ \text{ より} \rangle &= q_{2n+2} \cdot q_{2n-1} + q_{2n}^2 + 1 - q_{2n+1}^2 = (q_{2n+1} + q_{2n})(q_{2n+1} - q_{2n}) + q_{2n}^2 - q_{2n-1}^2 + 1 \\ &= q_{2n+1}^2 - q_{2n}^2 + q_{2n}^2 - q_{2n-1}^2 + 1 = 1 = (**) \text{ の右辺} \quad \text{終} \end{aligned}$$

偶数項だけを取り出しても成り立つだろうか? 第8項, 第10項, 第12項で実行すると,

$$q_{12} \cdot q_8 - q_{10}^2 = 144 \times 21 - 55^2 = -1, \quad \text{つまり } q_{2n+4} \cdot q_{2n} - q_{2n+2}^2 = -1 \cdots \cdots (***) \text{ が成立。}$$

$$\text{〔証明〕 } (***) \text{ の左辺} = (q_{2n+3} + q_{2n+2})q_{2n} - q_{2n+2}^2 = q_{2n+3} \cdot q_{2n} + q_{2n+2} \cdot q_{2n} - q_{2n+2}^2$$

$$\begin{aligned} \langle ④ \text{ より} \rangle &= q_{2n+3} \cdot q_{2n} + q_{2n+1}^2 - 1 - q_{2n+2}^2 \\ &= (q_{2n+2} + q_{2n+1})(q_{2n+2} - q_{2n+1}) + q_{2n+1}^2 - q_{2n+2}^2 - 1 = -1 = (***) \text{ の右辺} \quad \text{終} \end{aligned}$$

と, 見事にフィボナッチ数列の奇数項では1に, 偶数項では-1に, と対称的に成り立つ。

今回の東大の(2)の, もう一つの重要な性質, フィボナッチ数列の奇数項の中項に関する

$$q_{2n+3} + q_{2n-1} = 3q_{2n+1} \quad \text{という性質は, 偶数項でも成り立っている。つまり,}$$

$$q_{2n+4} + q_{2n} = 3q_{2n+2}, \quad \text{これについては数学的帰納法で証明可能である。試してください。}$$