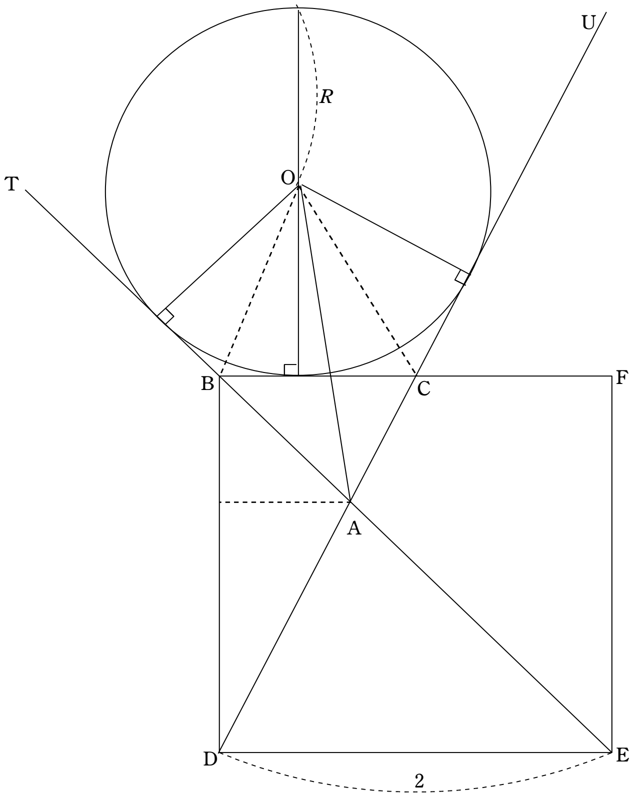
傍接円の半径を求める!

問題　図1のように，1辺の長さが2の正方形 $BDEF$ があり，辺 BF の中点を C とする。直線 EB と直線 DC の交点を A とし，直線 EB， DC の延長上にそれぞれ点 T， U をとるとき，辺 BC，半直線 AT， AU に接する円（傍接円）の半径 R を求めよ。

図 1



解1　$BA:AE=CA:AD=BC:DE=1:2$，

$BE=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{5}$ より，

$BA=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$CA=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ ……①，

傍接円の中心を O とすると，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R=\dfrac{\sqrt{2}}{3}R$，

$\triangle OAC=\dfrac{\sqrt{5}}{6}R$，　$\triangle OBC=\dfrac{R}{2}$　，

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OAC-\triangle OBC=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-3}{6}R$，

これと①より，

$$R=\frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-3}=\frac{2\{\sqrt{5}-(2\sqrt{2}-3)\}}{(\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3)\{\sqrt{5}-(2\sqrt{2}-3)\}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3)}{5-(2\sqrt{2}-3)^2}=\frac{2(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3)}{12(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+1)}{6(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{6}$$ 答

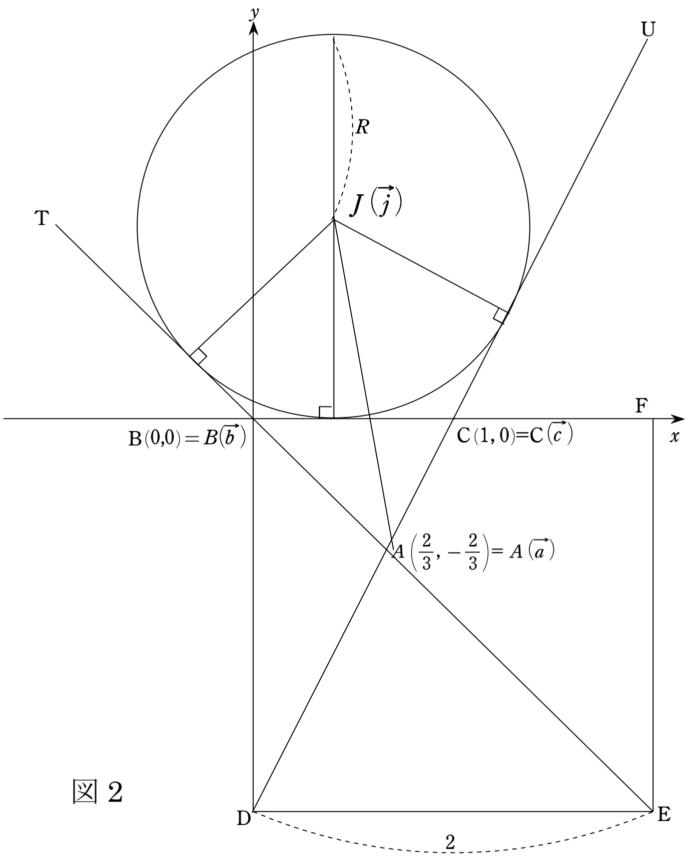


図 2

解2　頂点 B を原点として，図2のように座標軸を定める。　$B(0,0)$，$C(1,0)$，$A\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ とする。

さらに，位置ベクトルとして，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$A(\vec{a})$ とし，この場合，傍接円の中心（傍心）を $J(\vec{j})$ とする。

傍心の位置ベクトル（「山脇の超数学」No.59参照）を $\triangle ABC$ に適用して，

$$\vec{j}=\frac{b\vec{b}+c\vec{c}-a\vec{a}}{b+c-a}=\frac{\vec{0}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\vec{c}-\vec{a}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\vec{c}-3\vec{a}}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}$$

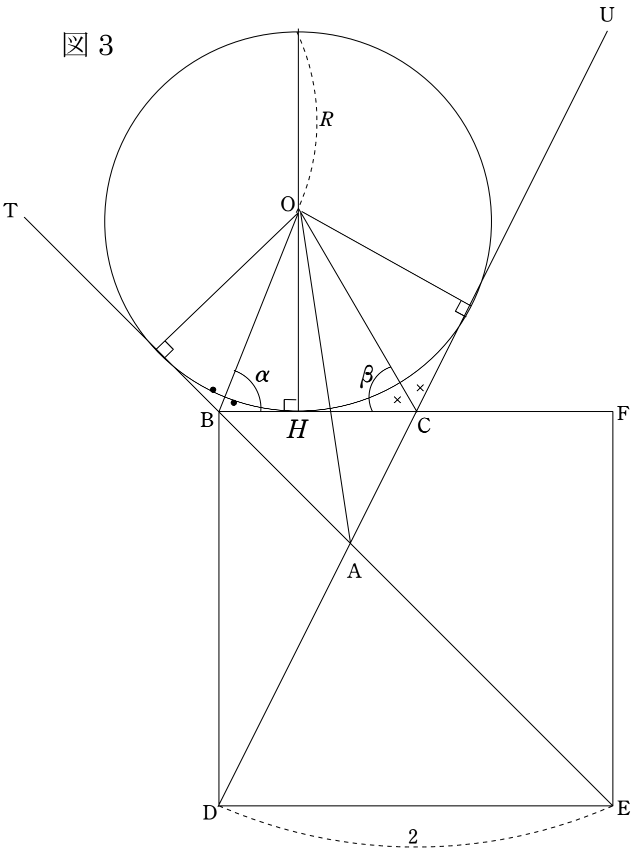
ここで $\vec{j}$ の y 成分，つまり J の y 座標が R に等しいから，

$$R=\frac{2\sqrt{2}\times 0-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}=\frac{2}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}$$

$$=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{6}$$ 答

山脇の超数学講座 No. 75

図 3



解3 $\cos\angle CBT=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\angle BCU=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\angle CBT=2\alpha$，$\angle BCU=2\beta$，傍接円の中心 O から辺 BC に下した垂線の足を H とすると，$\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$

$$\tan^2\alpha=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2}+1)^2,\quad \tan\alpha=\sqrt{2}+1,$$

$$\tan^2\beta=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4},\quad \tan\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$BH=\dfrac{R}{\tan\alpha}$，$CH=\dfrac{R}{\tan\beta}$，$BH+CH=1$ より，

$$R\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)=R\left(\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1,$$

ゆえに，$R=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-3}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{6}$ 答

解4 図 4 のように，傍接円の中心を O とし，傍接円と辺 BC，半直線 AT，AU との接点をそれぞれ H，P，Q とする。
点 O は，$\angle PAQ$ の二等分線上にあるので，
$\angle PAO=\angle QAO=\theta$ とする。

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\sin 2\theta=\frac{\sqrt{10}}{9}\sin 2\theta,$$

一方，$\triangle ABC=\dfrac{1}{3}$ だから，$\sin 2\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，

$\cos 2\theta>0$ より，$\cos 2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，　ゆえに，

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}=\frac{(\sqrt{10}-1)^2}{9},$$

$\tan\theta>0$ より，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$，

$AP+AQ=AB+BP+AC+CQ$
$=AB+BH+AC+CH=AB+AC+BC$，
$AP=AQ$ だから，

$$AP=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}{6},$$

$$R=AP\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}{6}\times\frac{\sqrt{10}-1}{3}$$

$$=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}+3\sqrt{2}-3}{18}=\underline{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{6}}$$ 答

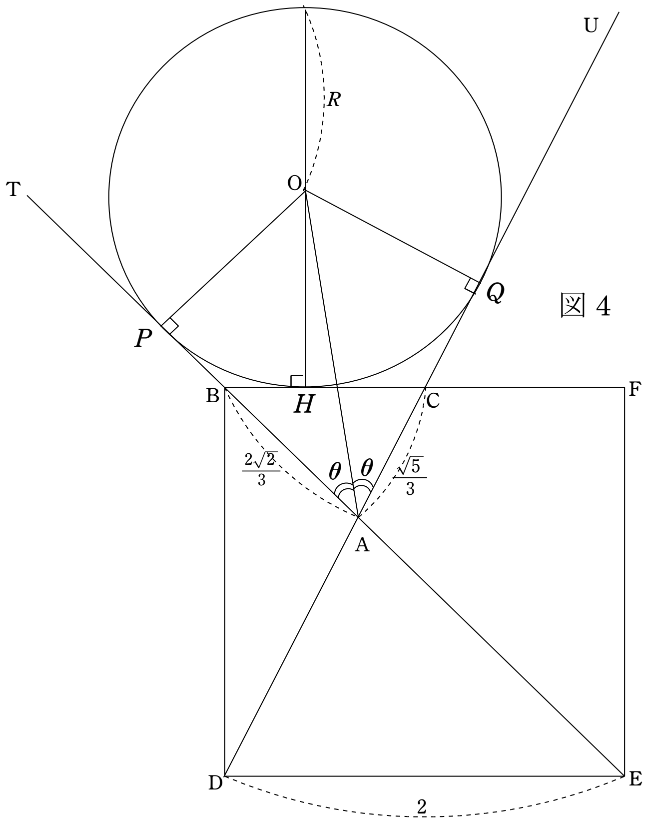


図 4

解説 正方形が絡んだ「傍接円の半径を求める問題」であるが，4つの解法を考え出した。じっくり味わってほしい。
解1は面積に結びつけて求める解法，解2は座標軸をとり，傍心の位置ベクトルから座標につなげて求める解法，
解3と解4は，傍心が外角あるいは内角の二等分線上の点であることを利用して，三角関数から求める解法である。