

# ダブル・フィボナッチ数列の衝撃!



**問題**  $xy$  平面に2つの円  $C_0: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ,  $C_1: (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  をとり,

$C_2$  を  $x$  軸と  $C_0, C_1$  に接する円とする. 更に,  $n=2, 3, \dots$  に対して  $C_{n+1}$  を  $x$  軸と

$C_{n-1}, C_n$  に接する円で  $C_{n-2}$  とは異なるものとする.  $C_n$  の半径を  $r_n$ ,  $C_n$  と  $x$  軸の

接点を  $(x_n, 0)$  として,  $q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}$ ,  $p_n = q_n x_n$  とおく.

(1)  $q_n$  は整数であることを示せ.

**証明** まず 図1の  $C_0, C_1, C_2$  において,  $r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$ ,

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} \text{ より, } (r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4r_1 r_2 = \frac{1}{4}, \text{ ゆえに } r_2 = \frac{1}{8}$$

次に, 図2において,  $L_{n, n+1} = |x_{n+1} - x_n|$  と定義すると,

$$(L_{n, n+1})^2 = (r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2 = 4r_n r_{n+1}, \quad L_{n, n+1} > 0$$

$$\text{ゆえに, } L_{n, n+1} = 2\sqrt{r_n \cdot r_{n+1}},$$

$$\text{同様に, } L_{n-1, n} = 2\sqrt{r_{n-1} \cdot r_n}, \quad L_{n-1, n+1} = 2\sqrt{r_{n-1} \cdot r_{n+1}},$$

$$\text{さらに, } L_{n-1, n} = L_{n, n+1} + L_{n-1, n+1} \text{ だから,}$$

$$2\sqrt{r_{n-1} \cdot r_n} = 2\sqrt{r_n \cdot r_{n+1}} + 2\sqrt{r_{n-1} \cdot r_{n+1}},$$

両辺を  $2\sqrt{2r_{n-1} \cdot r_n \cdot r_{n+1}}$  ( $\neq 0$ ) で割ると,

$$\frac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \text{ つまり, } q_{n+1} = q_n + q_{n-1} \dots\dots \textcircled{1} (n=1, 2, 3, \dots)$$

始めの考察より,  $q_0 = q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = q_2 + q_1 = 3, \dots\dots$  となり, 帰納的に

$q_n$  は整数である. ( $n=k-1, k$  のとき  $q_n$  が整数であるとする,  $n=k+1$  のときも

$q_n$  は整数である. したがって, すべての0以上の整数  $n$  について,  $q_n$  は整数である) **終**

(2)  $p_n$  も整数で,  $p_n$  と  $q_n$  は互いに素であることを示せ.

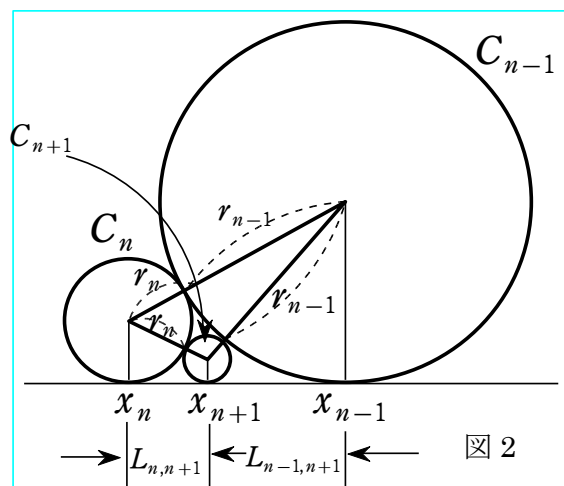
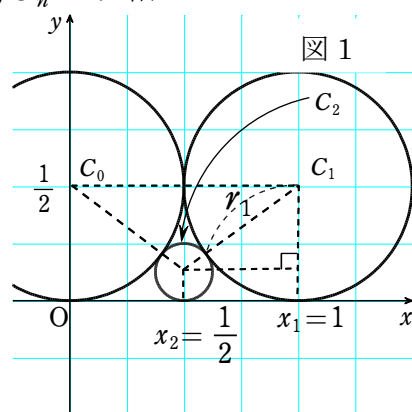
**証明** (1)の途中経過をふまえると,

$L_{n-1, n+1} : L_{n, n+1} = \sqrt{r_{n-1}} : \sqrt{r_n}$  であり, 内分点の公式より,

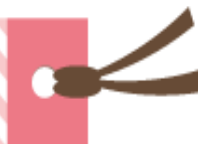
$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{r_{n-1}} x_n + \sqrt{r_n} x_{n-1}}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} = \frac{\frac{x_n}{\sqrt{2r_n}} + \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2r_{n-1}}}}{\frac{1}{\sqrt{2r_n}} + \frac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}} = \frac{q_n \cdot x_n + q_{n-1} \cdot x_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$$

$$= \frac{p_n + p_{n-1}}{q_{n+1}} \quad (\because \text{定義および}\textcircled{1}), \text{ よって, } q_{n+1} \cdot x_{n+1} = p_n + p_{n-1}$$

$$\text{つまり, } p_{n+1} = p_n + p_{n-1} \dots\dots \textcircled{2}$$



# 山脇の超数学講座 No. 74



$$p_0=0, \quad p_1=q_1x_1=1, \quad p_2=q_2x_2=2 \times \frac{1}{2}=1, \quad p_3=p_2+p_1=2, \quad p_4=3, \dots\dots$$

となり,  $q_n$  同様, 帰納的に  $p_n$  も整数である。

①, ②は「フィボナッチの数列」の形をしており,  $\{p_n\}$ の方が $\{q_n\}$ より初項が1だけ小さいので,  $p_n=q_{n-1} \dots\dots$  ③ 【 $\{q_n\}: 1,1,2,3,5,\dots\dots; \{p_n\}: 0,1,1,2,3,\dots\dots$ 】

$a$ と $b$ の最大公約数を  $\gcd\{a, b\}$  と表すと, ユークリッド互除法の考え方より,  
 $\gcd\{q_n, p_n\} = \gcd\{q_n, q_{n-1}\} = \gcd\{q_{n-1}, q_n - q_{n-1}\} = \gcd\{q_{n-1}, q_{n-2}\}$   
 $= \dots\dots = \gcd\{q_1, q_0\} = 1$  となるから,  $p_n$ と $q_n$ は互いに素である。終

(3)  $\alpha$ を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として,

不等式  $|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$  を示し,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ。

証明

$n \geq 1$  のとき,  $p_{n+1} = q_{n+1} \cdot x_{n+1}$  かつ  $p_{n+1} = q_n$  ( $\because$  ③)

$$x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q_n}{q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{1}{1 + x_n},$$

$$\alpha = \frac{1}{1+\alpha} \text{ を用いて, } x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{-(x_n - \alpha)}{(1+x_n)(1+\alpha)},$$

$$\text{よって, } |x_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)} |x_n - \alpha|$$

$$\text{ここで, } \alpha = \frac{1}{1+\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \alpha > 0 \text{ より, } \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$x_n$ は有理数,  $\alpha$ は無理数だから,  $x_n - \alpha \neq 0$ , ゆえに  $|x_n - \alpha| > 0$

$$\text{また, } x_1=1, x_2=\frac{1}{2}, \quad \text{図から判断して, } x_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに, } n \geq 1 \text{ で, } \frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(1+0)} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore |x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha| \quad \dots\dots (*) \quad \text{終}$$

$$n=0 \text{ のときも, } \frac{2}{3}|0 - \alpha| - |1 - \alpha| = \frac{5}{3}\alpha - 1 = \frac{5\sqrt{5}-11}{6} > 0 \text{ で, } (*) \text{ は成立。}$$

$$0 < |x_n - \alpha| < \frac{2}{3}|x_{n-1} - \alpha| < \left(\frac{2}{3}\right)^2|x_{n-2} - \alpha| < \dots\dots < \left(\frac{2}{3}\right)^n|x_0 - \alpha| = \left(\frac{2}{3}\right)^n\alpha,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n\alpha = 0 \text{ で「はさみうちの原理」より, } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0,$$

$$\text{したがって, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{答}$$

## コメント1

フィボナッチ数列  $\{q_n\}: 1,1,2,3,5,\dots\dots$  の

隣り合う項の比  $\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$  をとっていくと,

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} \approx 1.615\dots$$

でこれを繰り返すと, 1.6180339... に近づく。  
 この数が「黄金比 $\phi$ 」である。

## コメント2

$q_n$  は  $n$  の式で表すことができる。

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \text{ が黄金比。}$$

$\sqrt{5} = \phi - (1-\phi) = 2\phi - 1$  だから, 黄金比 $\phi$ を用いて書けば,

$$q_n = \frac{1}{2\phi-1} \{ \phi^n - (1-\phi)^n \} = \frac{1}{2\phi-1} \left\{ \phi^n - \left( -\frac{1}{\phi} \right)^n \right\}$$

フィボナッチ数列は, 黄金比と密接な関係にある。

## コメント3

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1 \text{ だから, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi,$$

この問題では,  $x_{n+1} = \frac{q_n}{q_{n+1}}$  の極限を問うている。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$