再び 四面体の問題へ！

四面体 OABC は次の 2 つの条件

(a)　OA⊥BC，　OB⊥AC，　OC⊥AB　　(b)　4つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。(京都大学)

解1　証明　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

条件 [a] において，OA⊥BC から　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

同様に，OB⊥AC から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，　OC⊥AB から　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ …… ①

条件 [b] から　$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

① から　$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$，　よって　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ …… ②

ここで，条件 [a]，[b] の O，A，B，C に関する対称性から

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ …… ③

$|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ …… ④　が成り立つ．

②，③，④ から　OA＝OB＝OC＝AB＝BC＝CA

ゆえに，四面体 OABC は正四面体である．　終

解2　証明　上の①までは，$\boxed{\text{解 1}}$の証明と同じとする。

$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，$\angle COA=\gamma$ として，①より，

$OA\cdot OB\cos\alpha=OB\cdot OC\cos\beta=OC\cdot OA\cos\gamma$ … Ⓐ

α,β,γ のうち 1 つでも鈍角があると，

内積が負の値となり，Ⓐが成り立たない。

全部鋭角か，全部鈍角しかない。

後者であると図 1 のように，

頂点に鈍角が集まり，底面の

三角形の面積のみ大きくなり，

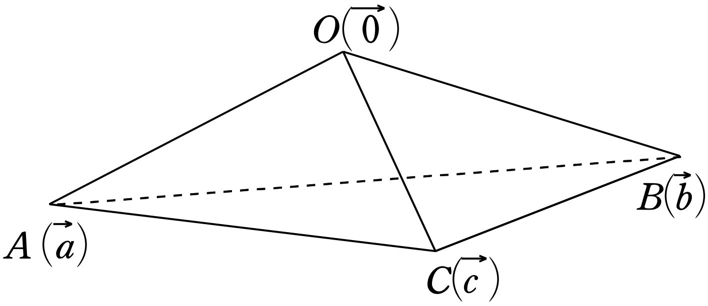
[b]　と矛盾する。

よって，α,β,γ はすべて鋭角である。

$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCA$ より，

$OA\cdot OB\sin\alpha=OB\cdot OC\sin\beta=OC\cdot OA\sin\gamma$ … Ⓑ

図 1



山脇の超数学講座 No. 73

Ⓐ^{2}＋Ⓑ^{2} を計算すると，

$OA^2 \cdot OB^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=OB^2 \cdot OC^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=OC^2 \cdot OA^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)$

よって，$OA^2 \cdot OB^2=OB^2 \cdot OC^2=OC^2 \cdot OA^2$，$OA>0$，$OB>0$，$OC>0$ だから，

$OA=OB=OC$，　以下は，解 1 の証明と同じとする。　終

それに対して，「初等幾何（ユークリッド幾何）」で解く方法があるはずであり，それを探究したのが次の　解 3　です。

解3　証明

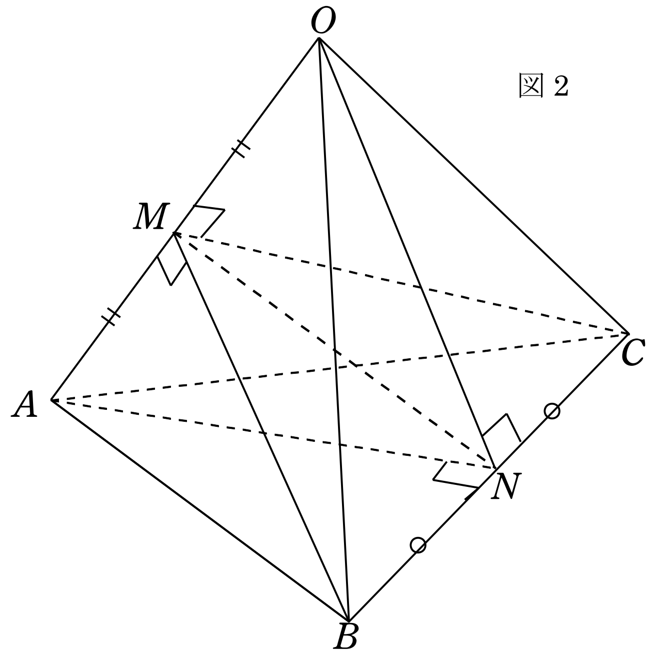


図 2

頂点 B より辺 OA に垂線を引き，OA との交点を M とすると，$OA \perp BC$，

$OA \perp BM$ より，$OA \perp$ 平面 BMC，

よって，$OA \perp CM$，

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ は辺 OA を共有していて，かつ

$\triangle OAB=\triangle OAC$　（面積が等しい）

より，$BM=CM$ …… ⑤

次に，頂点 O より辺 BC に垂線 ON を引くと，

$BC \perp OA$，$BC \perp ON$ より，

$BC \perp$ 平面 ONA，ゆえに　$BC \perp AN$，

$\triangle OBC=\triangle ABC$　より，$ON=AN$ …… ⑥

$\triangle MBC$ は⑤より二等辺三角形で，かつ $MN \perp BC$ より，$BN=NC$ …… ⑦，

同様に，$OM=MA$　…… ⑧，

$\triangle OBC$ で，$ON \perp BC$　かつ　⑦　より，$OB=OC$，

$\triangle ABC$ でも同様に　$AB=AC$，

$\triangle BOA$，$\triangle COA$ でも同様に　$BO=BA$，$CO=CA$，　ゆえに，

辺 OA，BC 以外の辺はすべて等しくなる。つまり，$OB=AB=AC=OC$，

続いて，$OB \perp AC$ を用いて，上と同様なことを行うと，辺 OB，AC 以外の辺はすべて等しくなり，$OA=AB=BC=OC$，

以上より，4 つの面はすべて正三角形となるから，

四面体 $OABC$　は正四面体である。　終

コメント　証明をよく眺めてみると，四面体にとって，〔a〕はかなり特別な条件です。つまり「向かい合う 3 組の辺（対辺）はすべて垂直である」。あとはこれに「〔b〕 4 つの面の面積が等しい」という条件をどう組み合わせていくかが，証明 3 の核心となるところです。結局，二等辺三角形の性質をうまく利用して「すべての辺が等しい」につなげているのです。

以　上