フィボナッチ数列の意外な性質

問題　数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=a_2=1$，　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定め，

数列 $\{b_n\}$ を　$\tan b_n=\dfrac{1}{a_n}$　により定める。ただし，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$ であるものとする。

(1)　$n\geqq 2$ に対して，　$a_{n+1}a_{n-1}-a_n{}^2$　を求めよ。

(2)　$m\geqq 1$（mは整数）　に対して，　$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})$　を求めよ。

(3)　無限級数　$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$　を求めよ。　　　　　（2025，東京科学大学・理工学系）

解説　数列 $\{a_n\}$ は，1，1，2，3，5，8，13，21，34，……　と続く，自然数からなる数列で，前の2項の和によってつくられていく数列であり，「フィボナッチ数列」として有名である。(1) の指示のように「実験」してみると，$a_3a_1-a_2{}^2=2\times1-1^2=1$，
$a_4a_2-a_3{}^2=3\times1-2^2=-1$，$a_5a_3-a_4{}^2=5\times2-3^2=1$，$a_6a_4-a_5{}^2=8\cdot3-5^2=-1$
と規則性がありそうである。一般項を推測して，数学的帰納法で証明してみよう。

(1)　**証明**

$$\left.\begin{array}{ll} n=2m \text{ のとき，} & a_{2m+1}a_{2m-1}-a_{2m}{}^2=\ \ 1, \\ n=2m+1 \text{のとき，} & a_{2m+2}a_{2m}-a_{2m+1}{}^2=-1 \end{array}\right\}\ \cdots(*)$$

を証明する。

［1］　$m=1$　で成立する。　（上記解説の通り）

［2］　$m=k$　で（$*$）が成立すると仮定すると，

$m=k+1$のとき，

$$a_{2k+3}a_{2k+1}-a_{2k+2}{}^2=(a_{2k+2}+a_{2k+1})a_{2k+1}-a_{2k+2}{}^2$$
$$=(a_{2k+1}-a_{2k+2})a_{2k+2}+a_{2k+1}{}^2=-a_{2k}a_{2k+2}+a_{2k+1}{}^2=-(-1)=1$$

となって，$m=k+1$のときも ($*$) は成立する。

同様に，　$a_{2k+4}a_{2k+2}-a_{2k+3}{}^2=-1$　も示すことができるから，

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$に対して，($*$) が成立する。偶数で1，奇数で−1となるから，

$\underline{a_{n+1}a_{n-1}-a_n{}^2=(-1)^n\ \ (n\geqq 2)}$　と表現できる。　**終**

(2)　正接 ($\tan\theta$) の加法定理を用いて，

$$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=a_{2m}\cdot\frac{\tan b_{2m+1}+\tan b_{2m+2}}{1-\tan b_{2m+1}\cdot\tan b_{2m+2}}=\frac{a_{2m}\left(\dfrac{1}{a_{2m+1}}+\dfrac{1}{a_{2m+2}}\right)}{1-\dfrac{1}{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}}}$$

$$=\frac{a_{2m}\cdot a_{2m+2}+a_{2m}\cdot a_{2m+1}}{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}-1}=\frac{a_{2m+1}{}^2-1+a_{2m}\cdot a_{2m+1}}{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}-1}=\frac{a_{2m+1}(a_{2m+1}+a_{2m})-1}{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}-1}$$

$$=\frac{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}-1}{a_{2m+1}\cdot a_{2m+2}-1}\ \underline{=\ 1}$$

答〈フィボナッチの数列であることと（$*$）を用いている〉

山脇の超数学講座 No. 72

(3)　(2) より，$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=1 \iff \tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=\dfrac{1}{a_{2m}}=\tan b_{2m}$ ……①

$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\tan b_{2m+1}=\dfrac{1}{a_{2m+1}}$，$\tan b_{2m+2}=\dfrac{1}{a_{2m+2}}$，かつ $m=1, 2, 3\cdots$ で

$0<\dfrac{1}{a_{2m+1}}<1$，$0<\dfrac{1}{a_{2m+2}}<1$ より，$0<b_{2m+1}$，$b_{2m+2}<\dfrac{\pi}{4}$ だから，$0<b_{2m+1}+b_{2m+2}<\dfrac{\pi}{2}$，

もちろん，$0<b_{2m}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ だから，①より，$b_{2m+1}+b_{2m+2}=b_{2m}$ ……②

よって，②から，

$$\begin{array}{rcl}
b_{2m+1} &=& \cancel{b_{2m}}-b_{2m+2}\\
b_{2m-1} &=& \cancel{b_{2m-2}}-\cancel{b_{2m}}\\
b_{2m-3} &=& \cancel{b_{2m-4}}-\cancel{b_{2m-2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
b_5 &=& \cancel{b_4}-\cancel{b_6}\\
+)\quad b_3 &=& b_2-\cancel{b_4}\\
\hline
\displaystyle\sum_{m=1}^{m} b_{2m+1} &=& b_2-b_{2m+2}
\end{array}$$

ここで両辺に b_1 を加えると，$\displaystyle\sum_{m=0}^{m} b_{2m+1}=b_1+b_2-b_{2m+2}$ ……③

$\tan b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ から $b_1=\dfrac{\pi}{4}$，同様に $b_2=\dfrac{\pi}{4}$，③より，$\displaystyle\sum_{m=0}^{m} b_{2m+1}=\frac{\pi}{2}-b_{2m+2}$ …④

さらに数列 $\{a_n\}$ の極限を考える。$m\geqq2$ にて，

$a_{2m+2}=a_{2m+1}+a_{2m}>a_{2m+1}+1>a_{2m}+2>a_{2m-1}+3>\cdots\cdots\cdots>a_2+2m=2m+1$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}(2m+1)=\infty$ だから，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}a_{2m+2}=\infty$，よって $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\tan b_{2m+2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{a_{2m+2}}=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}b_{2m+2}=0$，④から，$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}b_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-b_{2m+2}\right)=\underline{\frac{\pi}{2}}$ 答

別解　(1) について，以下のように解くこともできる。

漸化式　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ と $a_1=a_2=1$ より，$a_3=1+1=2$，　$n\geqq2$ において，

$a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2=(a_{n+1}+a_n)a_n-{a_{n+1}}^2=a_{n+1}(a_n-a_{n+1})+{a_n}^2$

$\qquad=a_{n+1}(-a_{n-1})+{a_n}^2=-(a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2)$

これより，$\{a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2\}$ は，初項 $a_3a_1-{a_2}^2=2\times1-1^2=1$，公比 -1 の等比数列

であり，$\underline{a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2=(-1)^{n-2}=(-1)^n}$ 答

コメント　今回は，フィボナッチ数の間の意外な性質から出発して，フィボナッチ数の逆数に対する正接(tan)の逆関数の数列を考えたとき，奇数番目の項の無限級数が $\dfrac{\pi}{2}$ に収束することを示す。「山脇の超数学No.48，49」でとり上げた級数の手法が使われている。