

# 正五角形を回転してできる十角形の問題



## 問題

1 辺の長さが 1 の正五角形を  $K$  とする。

$K$  の周で囲まれた図形を  $P$  とする。また、 $P$  を  $K$  の外接円の中心の周りに角  $\theta$  だけ回転して得られる図形を  $P_\theta$  とする。 $P$  と  $P_\theta$  の共通部分の周の長さを  $l_\theta$  とする。 $\theta$  が  $0^\circ < \theta < 72^\circ$  の範囲を動くとき、

$l_\theta$  の最小値が  $2\sqrt{5}$  であることを示せ。

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{であることは既知としてよい。}$$

(2025, 東北大学・理系 入試問題より, 一部変更)

## 証明 1

図 1 のように

正五角形  $ABCDE$  が  
外接円の中心  $O$  の周  
りに  $\theta$  だけ回転して、  
正五角形  $A'B'C'D'E'$   
に重なったとする。

図 1 のように点を定めると、

$$\triangle A'QR \equiv \triangle BTR,$$

$$A'R = BR = x,$$

$$A'Q = y \text{ とおくと,}$$

$$\text{対称性より } AQ = y,$$

$$\text{また } QR = z \text{ とおくと,}$$

$$x + y + z = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle A'QR$  で正弦定理より、

$$\frac{z}{\sin 108^\circ} = \frac{x}{\sin(72^\circ - \theta)}$$

$$= \frac{y}{\sin \theta}, \quad \textcircled{1} \text{ に代入して,}$$

$$\frac{z \{ \sin 72^\circ + \sin(72^\circ - \theta) + \sin \theta \}}{\sin 72^\circ} = 1, \quad \sin(72^\circ - \theta) + \sin \theta = 2 \sin 36^\circ \cos(\theta - 36^\circ) \text{ より,}$$

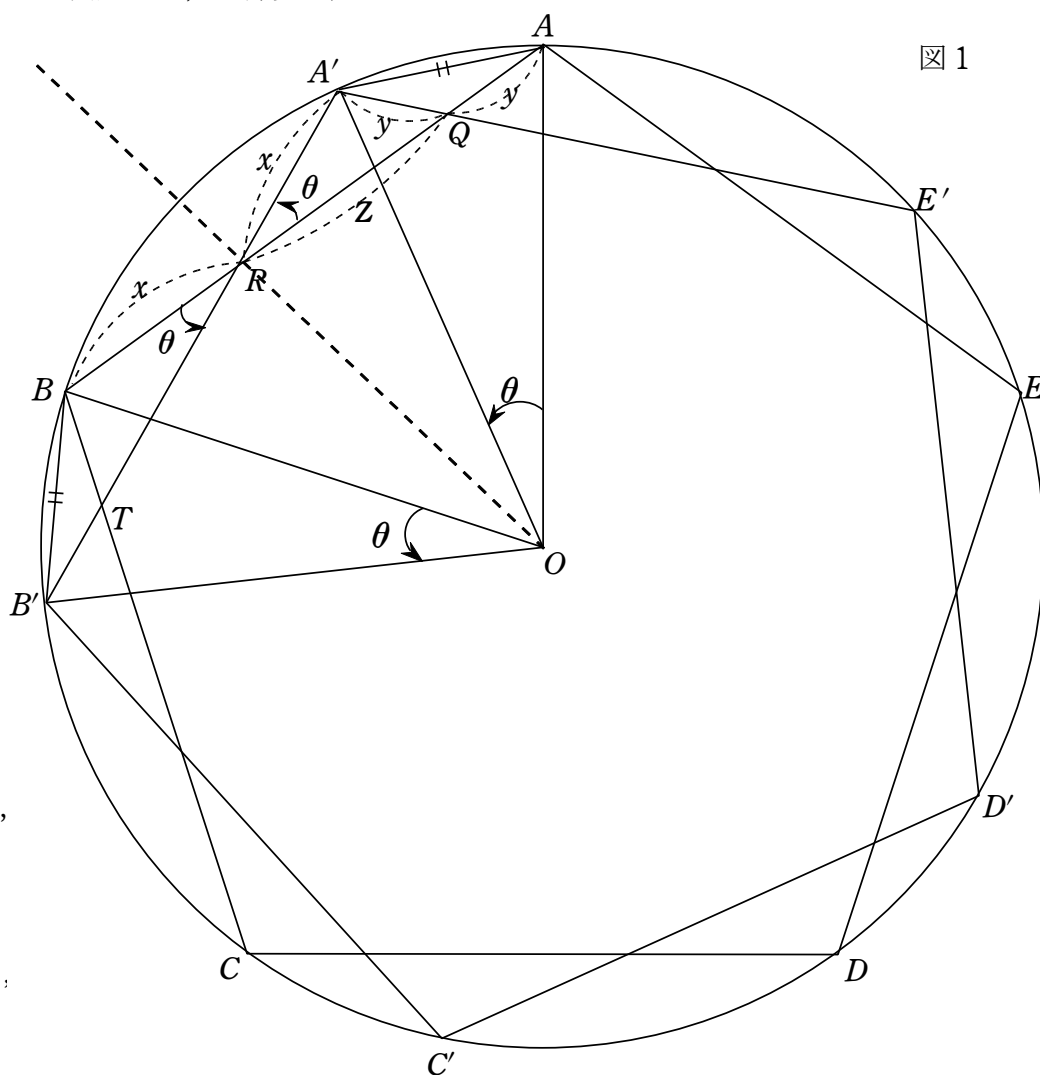
$$z = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ + 2 \sin 36^\circ \cos(\theta - 36^\circ)} \quad \text{となる。} \quad l_\theta = 10z \quad \text{だから,}$$

$z$  が最小のとき、 $l_\theta$  も最小となる。  $z$  が最小  $\Leftrightarrow \cos(\theta - 36^\circ)$  が最大 だから、

$$\theta = 36^\circ \text{ のとき } z \text{ は最小。} \quad z = \frac{1}{1 + \frac{2 \sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos 36^\circ}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\sqrt{5} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって、最小値は、} \quad l_\theta = 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \quad \text{終}$$

図 1



# 山脇の超数学講座 No. 71

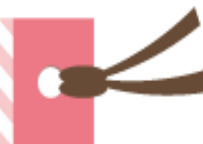
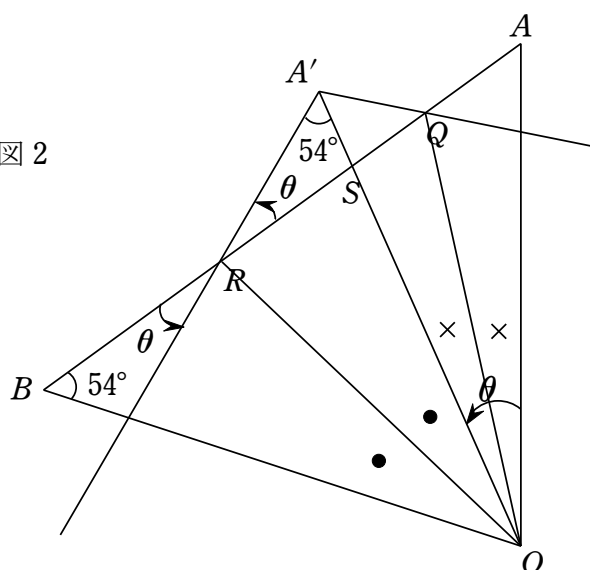


図 2



## 証明 2

図 2 のように  
正五角形  $ABCDE$  の隣り合う頂点  
 $A, B$  と  $A$  が外接円の中心  $O$  の周り  
に  $\theta$  だけ回転した点  $A'$  のみを考え、  
他の点を定める。

$\triangle OBS$  で正弦定理から、

$$\frac{OS}{\sin 54^\circ} = \frac{OB}{\sin(\theta + 54^\circ)} \quad \text{より、}$$

$$\frac{OB}{OS} = \frac{\sin(\theta + 54^\circ)}{\sin 54^\circ}$$

$$\angle BOR = \angle SOR, \quad \angle AOQ = \angle SOQ$$

から、角の二等分線の定理を用いて、

$$RS = BS \times \frac{OS}{OS + OB}, \quad QS = AS \times \frac{OS}{OS + OA} = AS \times \frac{OS}{OS + OB},$$

$$l_\theta = 10(RS + QS) = 10(BS + AS) \times \frac{OS}{OS + OB} = \frac{10}{1 + \frac{OB}{OS}} \quad (\because BS + AS = 1)$$

$$= \frac{10}{1 + \frac{\sin(\theta + 54^\circ)}{\sin 54^\circ}} = \frac{10 \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ + \sin(\theta + 54^\circ)} = \frac{10 \cos 36^\circ}{\cos 36^\circ + \cos(\theta - 36^\circ)}$$

$-36^\circ < \theta < 36^\circ$  より、 $\theta - 36^\circ = 0$ 、すなわち  $\theta = 36^\circ$  で  $l_\theta$  は最小になる。

$$\text{このとき、} l_\theta = \frac{10 \times \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{\frac{\sqrt{5} + 1}{4} + 1} = \frac{10(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)} = 2\sqrt{5} \quad \text{となる。} \quad \text{終}$$

〔証明 3〕 図 1 を用いて、 $x + y + z = 1$  …… ① までは、〔証明 1〕と同じとする。

余弦定理から、 $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 108^\circ = x^2 + y^2 + 2xy \cos 72^\circ$ 、

$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$  を代入し、さらに  $x + y = u$ 、 $xy = v$  とおくと、

$$z^2 = u^2 - 2v + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} v = u^2 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} v \quad \text{……②, ①より } u = 1 - z \quad \text{……③ だから、}$$

$$z^2 = (1 - z)^2 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} v \Leftrightarrow v = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} (1 - 2z) \quad \text{……④}$$

ここで、 $x, y$  は  $t^2 - ut + v = 0$  の解であり、判別式を  $D$  とすると、 $x, y$  は実数より、

$D = u^2 - 4v \geq 0$  (等号は  $x = y$  のとき)、③、④を代入して、

$$(1 - z)^2 - \frac{2(5 + \sqrt{5})}{5} (1 - 2z) \geq 0 \Leftrightarrow 5z^2 + 2(5 + 2\sqrt{5})z - (5 + 2\sqrt{5}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}z^2 + 2(\sqrt{5} + 2)z - (\sqrt{5} + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5}z - 1)(z + \sqrt{5} + 2) \geq 0$$

$z > 0$  だから、 $z \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、よって、 $l_\theta = 10z \geq 2\sqrt{5}$  (等号は  $x = y$  のとき)

$l_\theta$  の最小値は  $2\sqrt{5}$  ( $P$  と  $P_\theta$  の共通部分が 正十角形 のとき) 終