

対辺を内分する線分の長さ



$\triangle ABC$ があり、辺の長さを
図1のように定める。

頂点 A の対辺 BC を
 $t : (1-t)$ に内分する
点を D としたとき、
線分 AD の長さを
 a, b, c, t で
表してみよう。

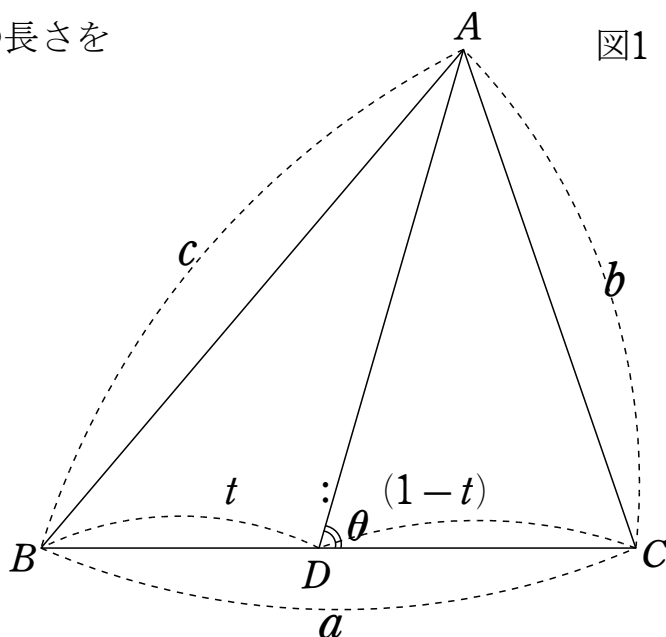


図1

解 $\angle ADC = \theta$ とおく。 $\triangle ACD$ と $\triangle ABD$ で余弦定理より

$$b^2 = AD^2 + (1-t)^2 a^2 - 2 AD \cdot (1-t) a \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$$c^2 = AD^2 + t^2 a^2 - 2 AD \cdot ta \cos(180^\circ - \theta)$$

ここで、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ だから、

$$c^2 = AD^2 + t^2 a^2 + 2 AD \cdot ta \cos \theta \quad \dots\dots ②$$

① $\times t$ + ② $\times (1-t)$ により、

$$t b^2 + (1-t) c^2 = AD^2 + \{t(1-t)^2 + t^2(1-t)\} a^2$$

これを整理して、

$$\boxed{AD^2 = t b^2 + (1-t) c^2 - t(1-t) a^2} \quad \dots\dots ③ \quad \text{が得られる。}$$

これを辺の長さがわかるような表記にすると、次のようになる。

$$\boxed{AD^2 = (1-t) AB^2 + t AC^2 - t(1-t) BC^2} \quad \dots\dots (*)$$

$t = \frac{1}{2}$, つまり、 D が辺 BC の中点のとき、 $(*)$ で $t = \frac{1}{2}$ として、

$$AD^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 - \frac{1}{4} BC^2, \quad BC = 2BD \text{ として整理すると、}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) \text{ となり、 } D \rightarrow M \text{ とすれば、}$$

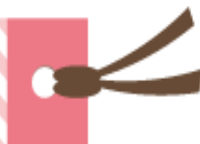
$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)}$$
 となり、**中線 (パップス) 定理** となる。

AD が角の二等分線 になっているときは、 $t : (1-t) = c : b$, ③で、

$$AD^2 = \frac{c}{b+c} \cdot b^2 + \frac{b}{b+c} \cdot c^2 - ta \cdot (1-t)a = bc - BD \cdot CD$$

よって、 $\boxed{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD}$ が得られるのである。

山脇の超数学講座 No. 68



次のような問題がある。

問題 3点 A, B, C をそれぞれ中心とする球 S_A, S_B, S_C があり、半径をそれぞれ α, β, γ とし、 $\alpha > \beta > \gamma$ とする。

この3つの球は平面 X 上にあり、どの2つの球も互いに外接している。

平面 X と球 S_B の接点を H 、球 S_A と S_C の接点を T とする。

直線 BT が平面 X と平行であるとき、 $\angle BHT = 60^\circ$ を証明せよ。

証明 図3のように、3点 A, T, C から平面 X に下した垂線の足をそれぞれ A', T', C' とする。直線 AC を含み、平面 X に垂直な平面上で考えると内分点の座標を求める要領で、

$$TT' = \frac{\gamma\alpha + \alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = BH = \beta \quad \text{となるので、}$$

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} \quad \dots\dots ④, \quad \text{また、図3で、}$$

$$A'C'^2 = (\alpha + \gamma)^2 - (\alpha - \gamma)^2 = 4\alpha\gamma,$$

$$\text{同様に、} A'H^2 = 4\alpha\beta, \quad C'H^2 = 4\gamma\beta \quad \dots\dots ⑤$$

次に、平面 X 上の $\triangle HC'A'$ に注目する。(図4)

等式(*)を使って、 HT'^2 を求める。

$$C'T': T'A' = \gamma : \alpha = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} : \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

$$(*) \text{ での } t = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad 1 - t = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \text{ となる。}$$

ところが、④より、

$$t = \frac{\beta}{2\alpha}, \quad 1 - t = \frac{\beta}{2\gamma} \quad \dots\dots ⑥, \quad \text{⑤、⑥と(*)より、}$$

$$HT'^2 = \frac{\beta}{2\gamma} \cdot 4\gamma\beta + \frac{\beta}{2\alpha} \cdot 4\alpha\beta - \frac{\beta^2}{4\alpha\gamma} \cdot 4\alpha\gamma = 2\beta^2 + 2\beta^2 - \beta^2 = 3\beta^2,$$

$$HT' > 0 \text{ より、} BT = HT' = \sqrt{3}\beta, \quad \tan \angle BHT = \frac{\sqrt{3}\beta}{\beta} = \sqrt{3},$$

$$0^\circ < \angle BHT < 90^\circ \text{ だから、} \angle BHT = 60^\circ \quad \text{終}$$

参考 (*)は、一般的には、「**スチュワートの定理**」，つまり、1746年スコットランドの数学者マシュー・スチュワート(1717~1785)によって発表された、「頂点から対辺に引かれた線分の長さ」に関する定理が有名である。

この定理は、図1で、

$$\boxed{b^2 \cdot BD + c^2 \cdot CD = a(BD \cdot CD + AD^2)} \quad \text{となる。}$$

これは、等式③で、 $t(1-t)a^2 = BD \cdot CD$ としてから、左辺に移項し、両辺に a をかけて、 $at = BD$, $a(1-t) = CD$ とすれば得られる。

以上

