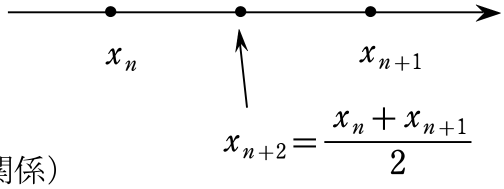
数学的帰納法を推す

問題 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしているとする。
$a_1<a_2$ のとき，次の問いに答えよ。　　　　(2022年，熊本大学)

(1)　$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_1<a_n<a_2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ として数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を定めると，$b_n<b_{n+1}<c_{n+1}<c_n$ が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して成り立つことを示せ。

前提



一般に，　x_n，x_{n+1}，x_{n+2} が実数で，

$x_n<x_{n+1}$ ，　$x_{n+2}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$　が成り立つ

とき，数直線上で右図のような位置関係（大小関係）があるから，　$x_n<x_{n+2}<x_{n+1}$　$\cdots\cdots(*)$　が成り立つ。

今，　$\{a_n\}$ は $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，かつ $a_1<a_2$ を満たしている。

(1)　　$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_1<a_n<a_2$

証明　[1]　$n=3$ のとき，$(*)$ より，　$a_1<a_3<a_2$，

$n=4$ のとき，$(*)$ より，　$a_3<a_4<a_2$　となるので，

$a_1<a_3<a_4<a_2$　が成り立つ。

[2]　$n=k,\ k+1$　で，　$a_1<a_k<a_{k+1}<a_2$　を仮定すると，

$n=k+2$ のとき，　$(*)$ より，　$a_k<a_{k+2}<a_{k+1}$　となり，

$n=k+2$ のときも，　$a_1<a_n<a_2$　が成り立っている。

よって，$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_1<a_n<a_2$　が成り立つ。 **終**

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ としたとき，

$b_n<b_{n+1}<c_{n+1}<c_n$　$\cdots\cdots$①

証明　[1]　$n=1$ のとき，①は　$a_1<a_3<a_4<a_2$ となるが，(1)−[1] で証明済。

[2]　$n=k$　のとき，　$b_k<b_{k+1}<c_{k+1}<c_k$　を仮定すると，

これは，　$a_{2k-1}<a_{2k+1}<a_{2k+2}<a_{2k}$　と同値である。

$n=k+1$ のとき，　$b_{k+2}=a_{2k+3}=\dfrac{a_{2k+1}+a_{2k+2}}{2}$　であり，

$(*)$ と仮定より，　$a_{2k+1}<a_{2k+3}<a_{2k+2}$　$\cdots\cdots$ ②

つまり，　$b_{k+1}<b_{k+2}<c_{k+1}$　$\cdots\cdots$ ③

〈次ページへ続く〉

山脇の超数学講座 No. 67

〈前ページからの続き〉

また，$n=k+1$ のとき，　$c_{k+2}=a_{2k+4}=\dfrac{a_{2k+3}+a_{2k+2}}{2}$ であり，

(＊) と②より，　$a_{2k+3}<a_{2k+4}<a_{2k+2}$

つまり，$b_{k+2}<c_{k+2}<c_{k+1}$ ……④

③と④より，　$b_{k+1}<b_{k+2}<c_{k+2}<c_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,$ …… に対して，$b_n<b_{n+1}<c_{n+1}<c_n$ が成り立つ。 終

(2) のみ 別解（別証）

与えられた漸化式 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ を，$2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ …… ⑤ と変形する。

⑤の特性方程式 $2x^2-x-1=0 \iff (2x+1)(x-1)=0 \iff x=-\dfrac{1}{2},\ 1$ となり，

⑤は，$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$ …… ⑥，

$a_{n+2}+\dfrac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$ …… ⑦ の２通りに変形できる。

⑥より，$\{a_{n+1}-a_n\}$ は，初項 a_2-a_1，公比 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ の等比数列で，

$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ …… ⑧，　同様に考えて，

$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n=a_2+\dfrac{1}{2}a_1$ …… ⑨

⑨−⑧ によって，

$$\frac{3}{2}a_n=a_2+\frac{1}{2}a_1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_2-a_1)=a_2+\frac{1}{2}a_1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(a_2-a_1),$$

よって，$a_n=\dfrac{2}{3}\left\{a_2+\dfrac{1}{2}a_1+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n(a_2-a_1)\right\}$ …… ⑩

$a_2-a_1>0$ と⑧，⑩より，$\{a_n\}$ の隣接項の大小関係は $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ の大小関係と一致し，

しかも，n が奇数の場合と偶数の場合で分けて考える必要がある。

まず $n=2k-1$ とすると，⑧より，$a_{2k}-a_{2k-1}=(a_2-a_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2(k-1)}>0$

よって，$a_{2k}>a_{2k-1}$，　つまり，$c_k>b_k$ …… ⑪ $(k=1,2,3,\cdots)$

さらに，$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}<\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}<0$ と ⑩より，$a_{2k-1}<a_{2k+1} \iff b_k<b_{k+1}$ ……⑫

また，$0<\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2k+2}<\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ と ⑩より，$a_{2k+2}<a_{2k} \iff c_{k+1}<c_k$ ……⑬

⑫，⑬と⑪を合わせて，$b_k<b_{k+1}<c_{k+1}<c_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,$ …… に対して，$b_n<b_{n+1}<c_{n+1}<c_n$ が成り立つ。 終

コメント　今回は２数の平均値をとるという単純な数列ですが，興味深い性質があることが示されました。
そして数学的帰納法の素晴らしさを改めて実感し，一般項からも考察できる問題であるという発見がありました。