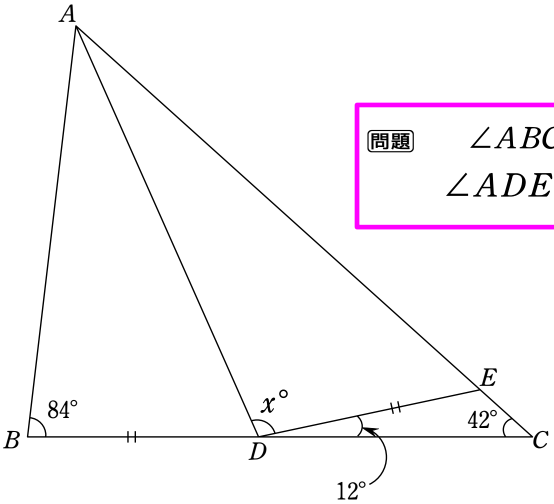
角度を求める問題から？2

図 1



問題　$\angle ABC = 84°$, $\angle BCA = 42°$, $\angle CDE = 12°$, $BD = DE$ のとき，$\angle ADE = x°$ とする。　x を求めよ。

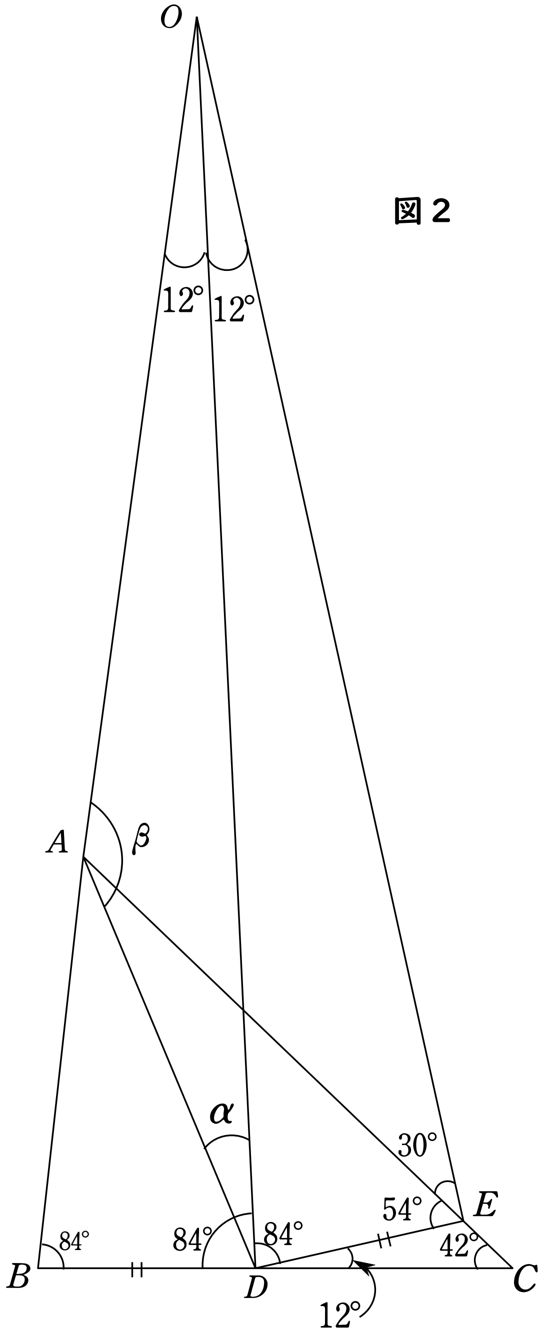


図 2

解答　　図 2 のように，
半直線 BA 上に $BO = DO$ となる点 O を
とると，$\angle ODB = \angle OBD = 84°$ となり，
$\angle ODE = 84°$ となる。
$BD = ED$ より，$\triangle OBD \equiv \triangle OED$
よって，$OB = OD = OE$，
$\angle BOD = \angle EOD = 12°$ となる。
$OE = OD = 1$ としても一般性を失わないから，
$\triangle OAE$ で正弦定理より，

$$\frac{OA}{\sin 30°} = \frac{1}{\sin 126°} = \frac{1}{\cos 36°},$$

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\phi}{2} \quad (\phi \text{ は黄金比}),$$

$$2\,OA = \frac{2}{\phi} \text{ より，} \quad OA = \frac{1}{\phi} \quad \cdots\cdots ①$$

次に，$\triangle OAD$ で，$\angle ODA = \alpha$，
$\angle OAD = \beta$ とおくと，

$$\alpha + \beta = 168° \quad \cdots\cdots ②$$

正弦定理より，$\dfrac{OA}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\beta}$，①より，

$$\sin\alpha = \frac{1}{\phi}\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

鋭角の正弦の三角比において
ϕを含むのは，

図 3

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\phi}, \quad \sin 54° = \cos 36° = \frac{\phi}{2}$$

③で $\alpha = 18°$ とすれば，$\sin\beta = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \beta = 150°$

この場合，α, β は②を満たすので，角の一意性により
$\alpha = 18°$，<u>$\angle ADE = 18° + 84° = 102°$，$x = 102$ 答</u>

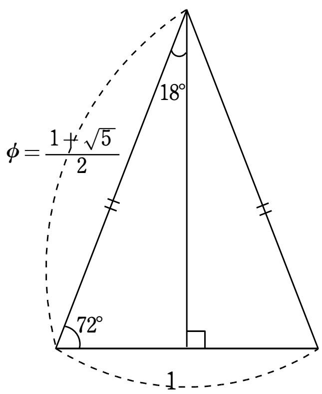


図 3

山脇の超数学講座 No. 66

別解 1　半直線 BA 上に，OB= ODとなる点 O をとると，$OD=OE$ となり，B,D,E は，円 O を中心とし，半径 OB の円に内接する正三十角形の頂点となる。頂点B の左隣の頂点を順に G，F とする。F と A を結ぶと，$\angle FAB=\angle EAB=54^\circ$ であり，$\triangle OEF$ と対称な三角形が正三十角形の中にある。対称軸は，$\angle EOP=84^\circ$ となる点 P を円 O 上にとったときの，直線 OP である。そして, 直線OPに関して点 E,D,B,G,F,A に対称な点をそれぞれ E',D',B',G',F',A' として，とることができる。　図 4

$\angle OF'E=\angle OEF'=30^\circ$，また　$\triangle OEF'\equiv\triangle OFE'$，　$\angle DOF=\angle D'OF'=36^\circ$，

$\angle FOF'=72^\circ$より，$\angle DOD'=144^\circ$，ゆえに $\angle ODD'=\theta=\dfrac{1}{2}(180^\circ-144^\circ)=18^\circ$，

したがって，$\underline{\angle ADE=84^\circ+18^\circ=102^\circ}$ 答

図 4

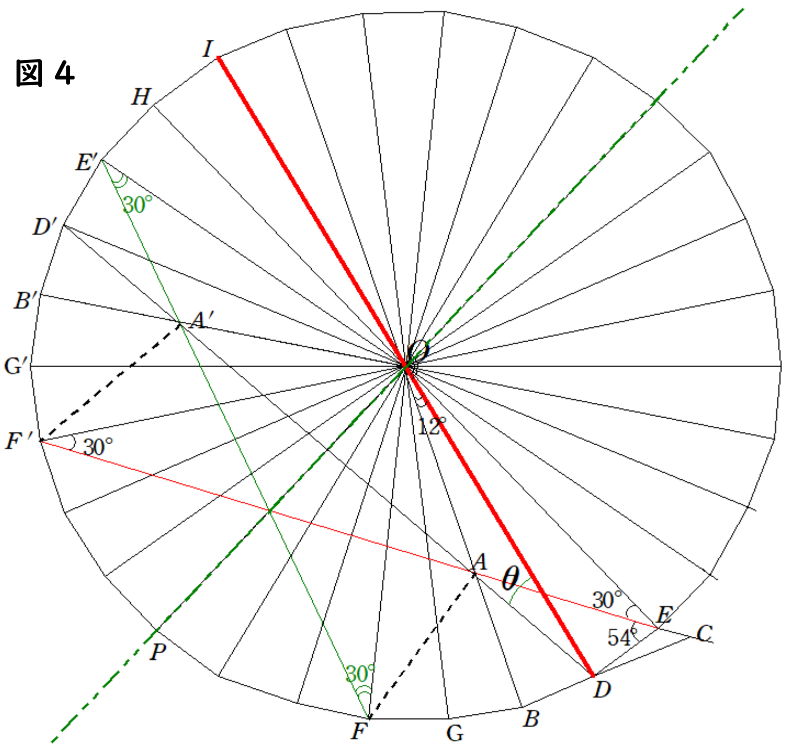
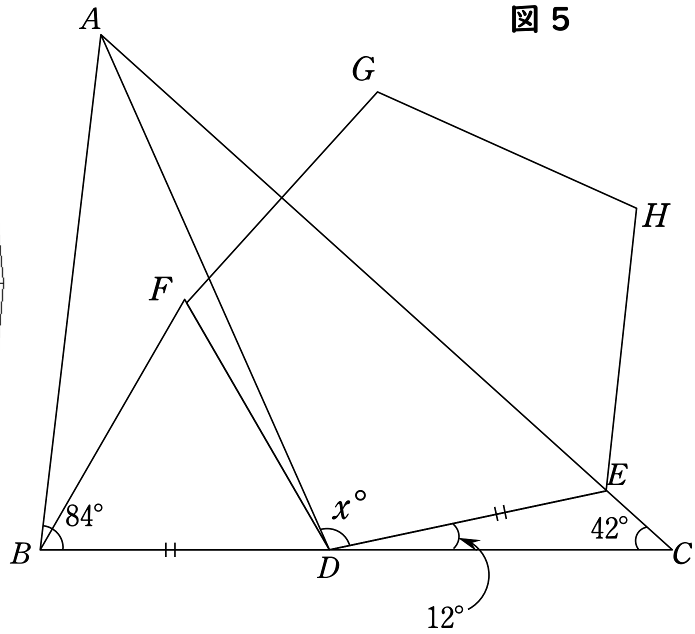


図 5



別解 2

まず $\triangle DBE$ を考えて，$DB=DE$，$\angle CDE=12^\circ$ より $\angle DBE=\angle DEB=6^\circ$，

また，$\angle AED=42^\circ+12^\circ=54^\circ$，……①

今，BD を１辺とする正三角形を A と同じ側につくり，$\triangle FBD$ とする。

$\angle FDE=108^\circ$ となるので，$DE=DF$ を二辺とする正五角形 $DEHGF$ を作図できる。すると，$\angle DEF=36^\circ$，①より，$\angle AEF=18^\circ$　となるので，

直線 AEは正五角形の対称軸となる。同様に，直線 BH も正五角形の対称軸。

これより，$AD=AH$，また，$BG=BE$　……(∗)

$\angle BHE=54^\circ$，また $\angle ABH=54^\circ$ だから，$BA/\!/EH$　　図 5

ゆえに，$\angle AEH=\angle BAE=54^\circ$ となり，四角形 $ABEH$ は等脚台形となり，

$AH=BE$　……②，(∗) より，$\triangle BEG$ と $\triangle AHD$ はともに二等辺三角形で，

②より等辺はすべて等しくなり，かつ $EG=HD$ だから，

$\triangle BEG\equiv\triangle AHD$，　①より，$\angle EBH=30^\circ-6^\circ=24^\circ$，

ゆえに，$\angle DAE=\angle EBH=24^\circ$，$\triangle ADE$ で，

$\underline{\angle ADE=180^\circ-54^\circ-24^\circ=102^\circ}$　答