

(続) 直交する接線の交点の軌跡(楕円)



楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点で接する2直線が直交するとき、その交点の軌跡は

円 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ である。

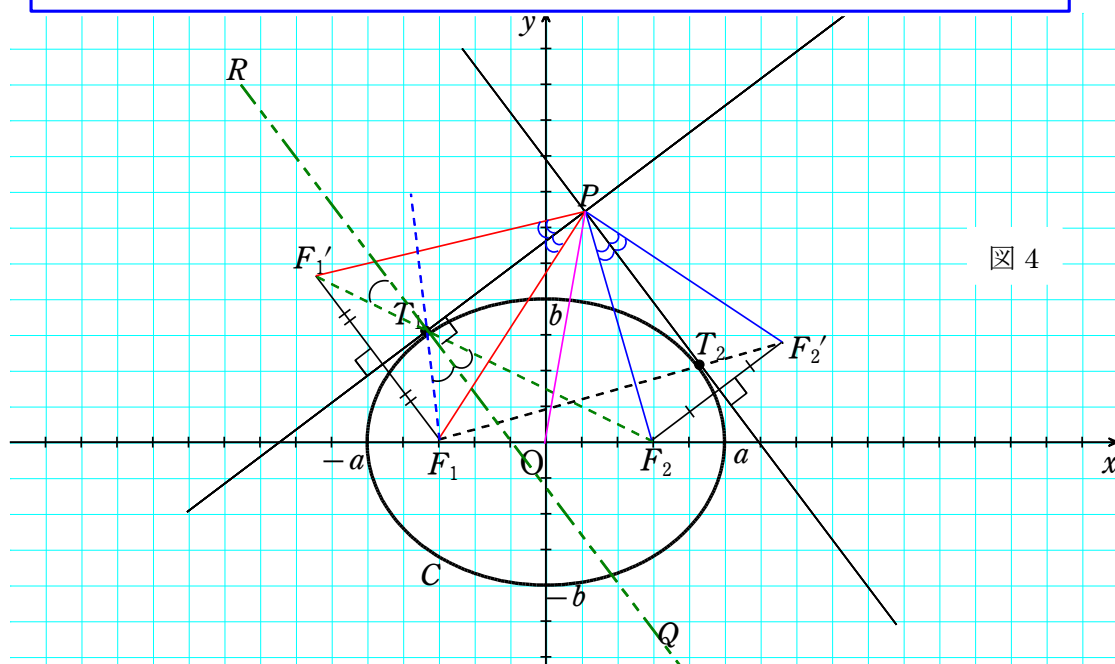


図 4

別解 2 図 4 のように座標軸と楕円 C の位置を決める。長軸 $(2a)$ 、短軸 $(2b)$ はそれぞれ x 軸上、 y 軸上にある。 $(a > b > 0)$ 焦点は、 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ である。楕円外の点 P から 2 接線を引き、接点を T_1 、 T_2 とする。点 F_1 、 F_2 のそれぞれ直線 PT_1 、 PT_2 に関して対称な点を F_1' 、 F_2' とする。楕円の定義より、 $F_1T_1 + F_2T_1 = 2a$ である。楕円の性質として、点 T_1 を通り接線 PT_1 に垂直な直線 QR を図 4 のように引くと、 $\angle F_1T_1Q = \angle F_2T_1Q = \angle F_1'T_1R$ となるので、3 点 F_2 、 T_1 、 F_1' は一直線上に並ぶ。

$F_1T_1 = F_1'T_1$ だから、 $F_1'F_2 = 2a$ 、同様に $F_1F_2' = 2a \dots\dots ①$ 、 $\therefore F_1'F_2 = F_1F_2' \dots\dots ②$

$\triangle PF_1'F_2$ と $\triangle PF_1F_2'$ で、 $PF_1' = PF_1$ 、 $PF_2 = PF_2'$ $\dots\dots ③$ 、②、③より、

$\triangle PF_1'F_2 \equiv \triangle PF_1F_2'$ 、ゆえに、 $\angle F_1'PF_1 = \angle F_2PF_2'$ となり、 $\angle T_1PF_1 = \angle T_2PF_2'$ 、

これより、 $\angle T_1PT_2 = \angle F_1PF_2'$ が成り立つ。ゆえに、2 接線が直交するとき、

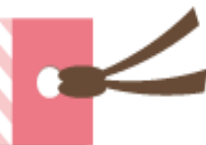
$\angle F_1PF_2' = 90^\circ$ となり、 $\triangle PF_1F_2'$ で三平方の定理より、 $PF_1^2 + PF_2'^2 = F_1F_2'^2 = 4a^2 (\because ①)$

$PF_2' = PF_2$ より、 $PF_1^2 + PF_2^2 = 4a^2$ 、ところが、 $\triangle PF_1F_2$ で中線定理より、

$PF_1^2 + PF_2^2 = 2(OP^2 + OF_1^2)$ 、そして、 $OF_1^2 = a^2 - b^2$ を代入して整理すると、

$OP^2 = \frac{4a^2}{2} - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$ 、したがって、 $P(x, y)$ とすれば、 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 、つまり、

2 接線が直交するときの交点 P の軌跡は、原点中心、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円である。 **終**



三角関数からのアプローチ

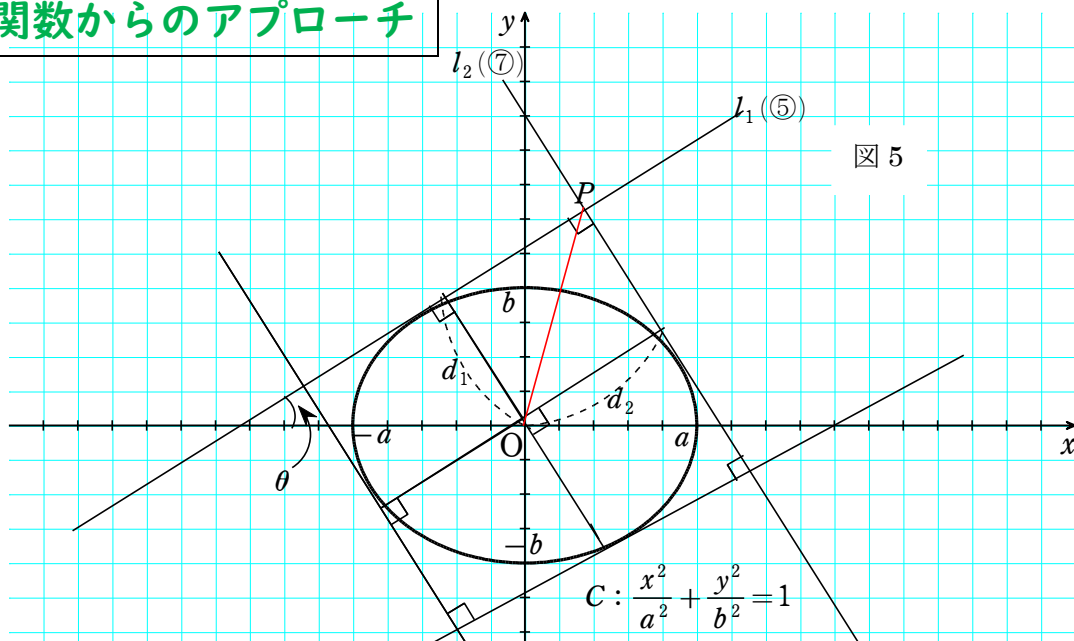


図 5

別解 3 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) において、傾きが m である接線 l_1 の方程式

は、 $l_1: y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ ④ (証明略、前回の証明参照) と書ける。

④ の x 軸の正の方向となす角を θ とすると、 $m = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, これを④に代入して、両辺に

$\cos \theta$ をかけて整理すると、 $-\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y = \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ ⑤

l_1 と垂直な接線 l_2 の方程式は、 $x + my = \pm \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$ ⑥ (前回の証明参照)

⑤の場合と同様に三角関数に直すと、

$$\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad \text{..... ⑦}$$

方程式を⑤、⑦の形にすることにより、媒介変数 θ の変化に伴い、 y 軸に平行な直線も含めて、すべての直交する楕円の2接線が表現されたことになる。

ここで、直線 l_1, l_2 の原点との距離をそれぞれ d_1, d_2 とすると、点と直線の距離より、

$$d_1 = \frac{|\pm \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}|}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \quad \text{..... ⑧}$$

$$\text{同様に、} \quad d_2 = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad \text{..... ⑨}$$

図5のように、直交する l_1 と l_2 の交点を P とすると、三平方の定理より、

$$OP^2 = d_1^2 + d_2^2 = a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2 + b^2$$

$P(x, y)$ とすれば、 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, つまり、2接線が直交するときの交点 P の軌跡は、

原点中心、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円である。 **終**