角度を求める問題から？

問題　$\triangle ABC$ の辺 BC 上に，$AB=CD$ となるように点 D をとる。$\angle ABD=24°$，$\angle BAD=30°$ のとき，$\angle ACB=x°$ として，x を求めよ。

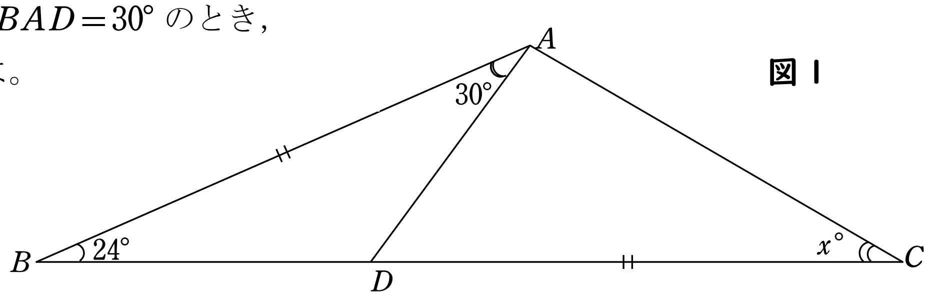

図１

解答 1　図２のように，辺 AB を１辺とする正三角形を辺 BC 側につくり，$\triangle ABE$ とする。すると，
$\angle DBE=\angle DEB=36°$ となるので，BD，DEを2辺とする正五角形 $BDEFG$ をつくることができる。
ここで，$AB=BE=AE=CD=DG=GE$ となる。
$\triangle DCG$ は，$DC=DG$ の二等辺三角形で，
$\angle GDE=\angle CDE=72°$ より，$DE\perp CG$，
よって，$\triangle ECG$ は，$EC=EG$ の二等辺三角形となり，
$\angle GED=\angle CED=72°$，$\angle FEG=36°$　だから，
3点 C，E，F は一直線上に並ぶ。
$CD=CE$ より，$\angle DCE=36°$，$EA=EC$，
$\angle AEC=72°-24°=48°$，$\angle ECA=\dfrac{180°-48°}{2}=66°$，
したがって，$\underline{x°=66°-36°=30°}$　答

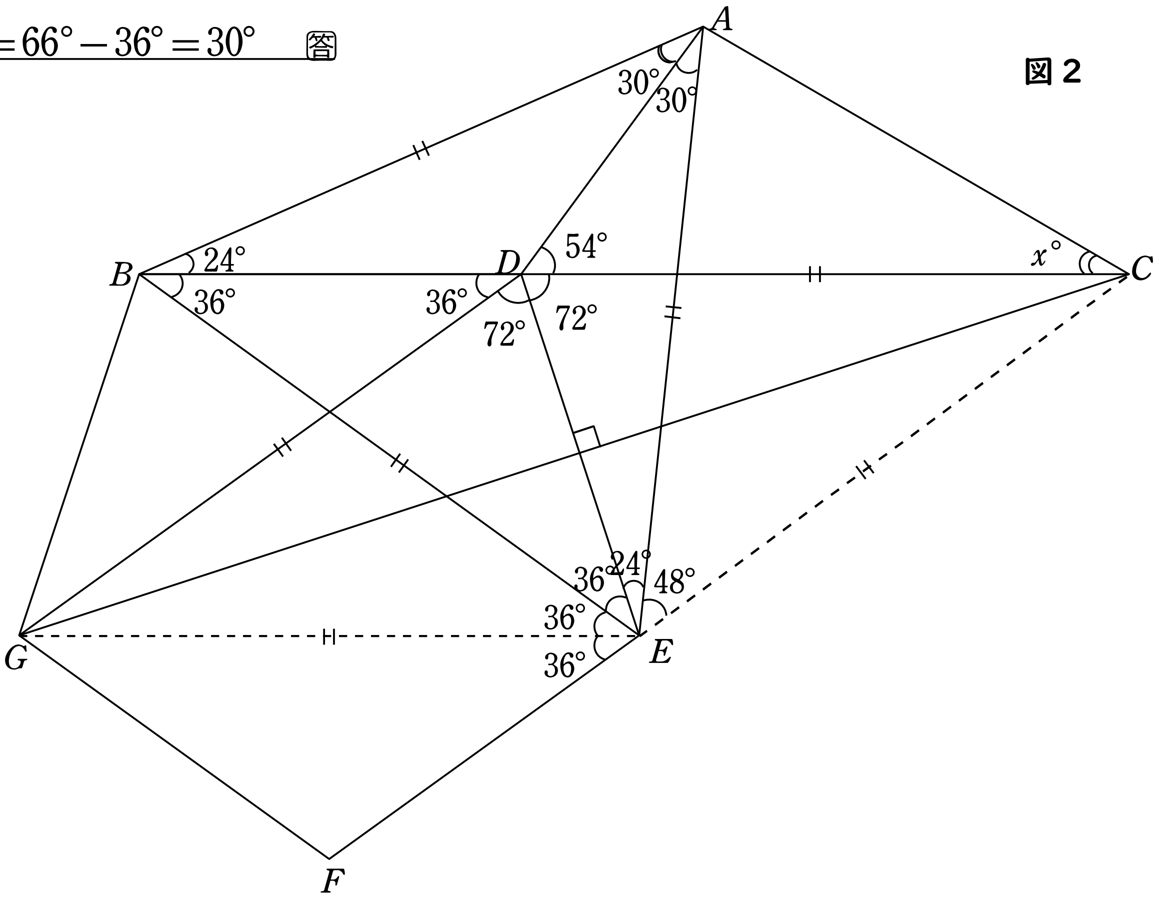

図２

山脇の超数学講座 No. 60

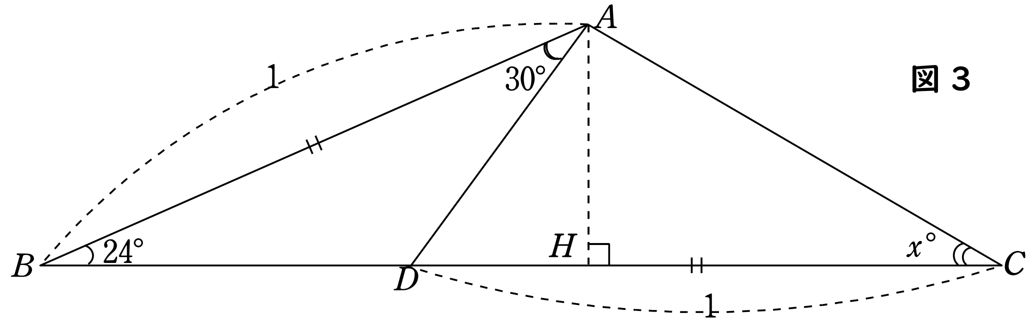

図 3

解答 **2**　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi$（黄金比）とおき，$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}=\dfrac{\phi}{2}$ は既知とする。

図3のように，$AB=CD=1$ としても一般性を失わない。$\triangle ABD$ で正弦定理より，

$$\frac{BD}{\sin 30^\circ}=\frac{1}{\sin 126^\circ}=\frac{1}{\sin 54^\circ}=\frac{1}{\cos 36^\circ},\quad BD=\frac{1}{2\cos 36^\circ}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi-1,$$

$\therefore BC=\phi-1+1=\phi$ ……(*)，点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと，$CH=\phi-\cos 24^\circ$，

$$AH=\sin 24^\circ=\sin(60^\circ-36^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 36^\circ-\frac{1}{2}\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\phi-\frac{1}{2}\sin 36^\circ,$$

$$CH=\phi-\cos(60^\circ-36^\circ)=\phi-\left(\frac{1}{4}\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 36^\circ\right)=\frac{3}{4}\phi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 36^\circ=\sqrt{3}\,AH,$$

よって，$\tan x^\circ=\dfrac{AH}{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$0^\circ<x^\circ<90^\circ$ より，$\underline{x^\circ=30^\circ}$ 答

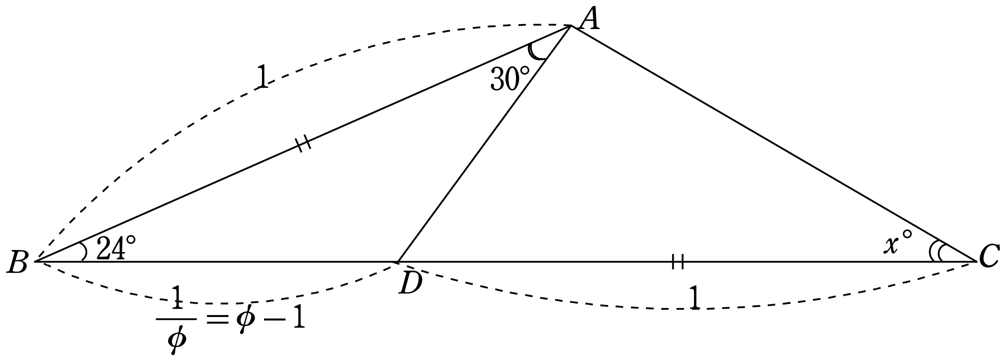

図 4

さらに，画期的な解が生まれた。三角形の相似から一気に結論を導くものである。

解答 **3**　$BC=\phi$，つまり (*) までは，解答 2 と同じとする。

$BD=\dfrac{1}{2\cos 36^\circ}=\dfrac{1}{\phi}=\phi-1$，　図4の　$\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ で，

$BC:BA=\phi:1=1:\dfrac{1}{\phi}=AB:DB$，また，$\angle ABC=\angle DBA$ (共通)，

ゆえに，対応する 2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから，

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$，したがって，$\underline{x^\circ=\angle ACB=\angle DAB=30^\circ}$ 答

解説 以前にたびたび紹介した「ラングレーの問題」でも「三角形の相似による解決」が最も洗練された解法であったが，今回は「**相似比＝黄金比**」という意外な秘密があった。