五心最後の砦＝傍心の位置ベクトルに挑む！

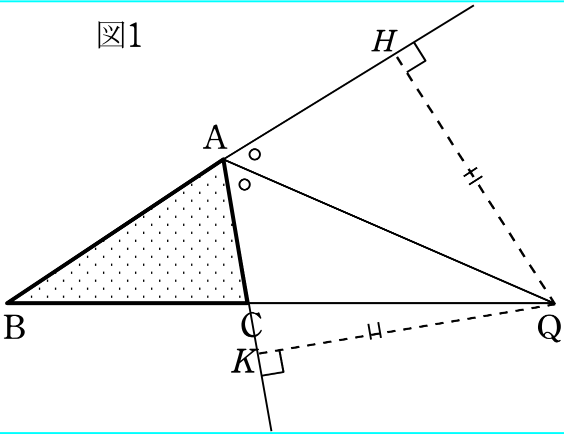
前提

三角形の外角の二等分線と比

定理　AB≒AC である △ABC の頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q は，辺 BC を AB：AC に外分する。

つまり，図1で　BQ：QC＝AB：AC

図1



証明　点 Q より，辺 BA，AC の延長上に,それぞれ垂線をおろし，その足を H，K とする。直線 AQ は $\angle CAH$ を2等分しているから，$QH=QK$ …… ①

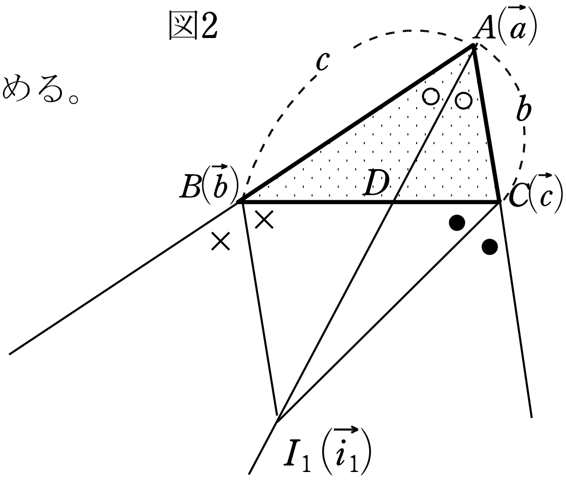
図1で，$\triangle ABQ=\dfrac{1}{2}AB\cdot QH$，　$\triangle ACQ=\dfrac{1}{2}AC\cdot QK$，

①より，$\triangle ABQ:\triangle ACQ=AB:AC$，　一方，$\triangle ABQ:\triangle ACQ=BQ:QC$

したがって，　$BQ:QC=AB:AC$　終

Ⅳ．傍心の位置ベクトル

図2



今，$\triangle ABC$ の位置ベクトルを図 2 のように定める。

$\angle A$ の二等分線，$\angle B$ の外角の二等分線，

$\angle C$ の外角の二等分線は，1点で交わる。

この点は $\triangle ABC$ の3つある傍心の1つであり，

$I_1(\vec{i_1})$ と定める。

直線 AI_1 と辺 BC の交点を $D(\vec{d})$ とすると，

角の二等分線の定理より，$BD:DC=c:b$，

ゆえに，$\vec{d}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}$，　次に，$BC=a$　だから，$BD=a\times\dfrac{c}{b+c}=\dfrac{ac}{b+c}$，

よって，$BA:BD=c:\dfrac{ac}{b+c}=(b+c):a$，

$\triangle BAD$ は $BA\fallingdotseq BD$ であり，頂点 B における外角の二等分線と辺 AD の延長との交点 I_1 は，前提より，辺 AD を $BA:BD=(b+c):a$ に外分する。$AI_1:I_1D=(b+c):a$，

したがって，　$\vec{i_1}=\dfrac{-a\times\vec{a}+(b+c)\times\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}}{b+c+(-a)}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}-a\vec{a}}{b+c-a}$

となって，1つの傍心の位置ベクトルが求められた。

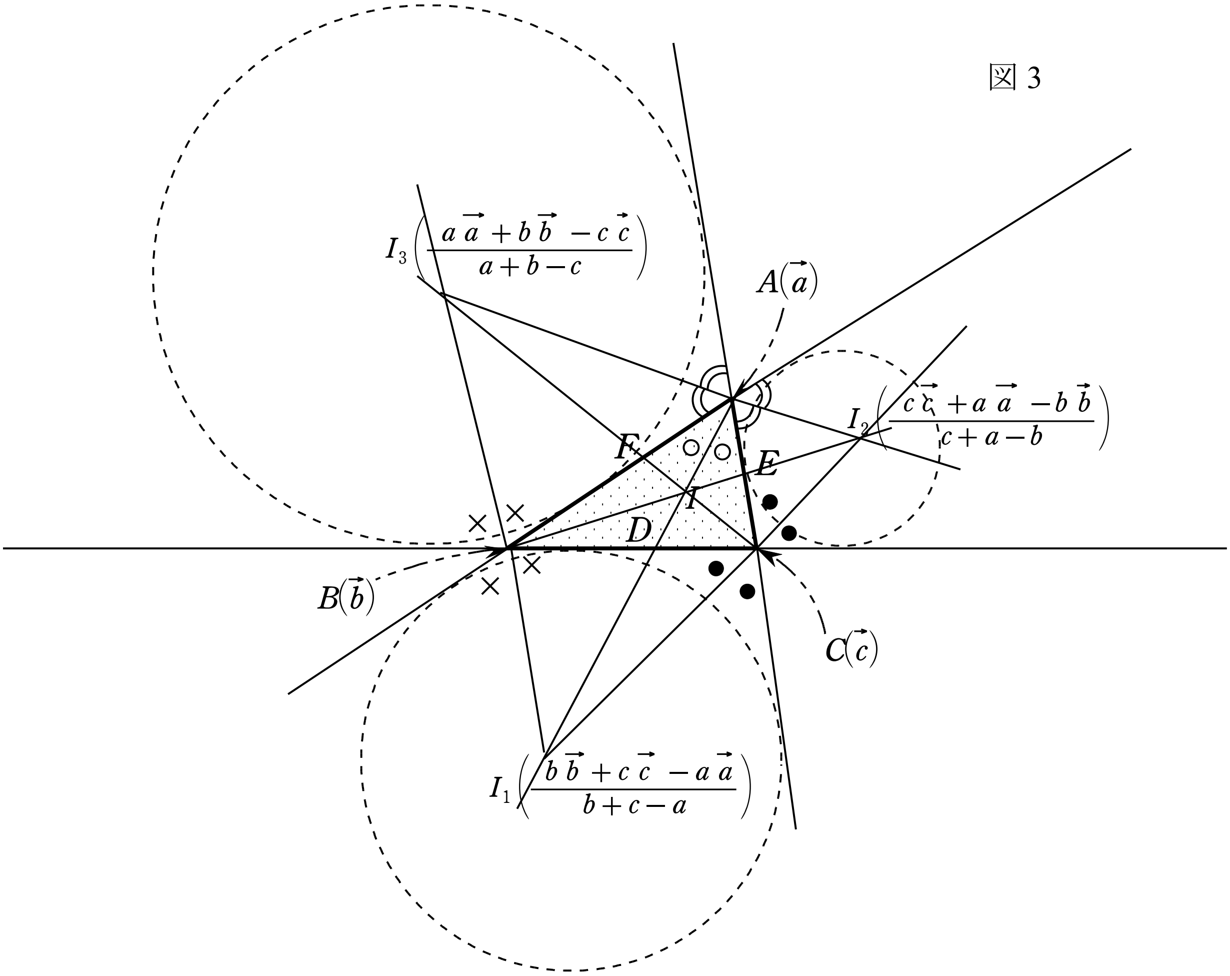


図 3

他の傍心の位置ベクトルも求めてみよう。

$\angle B$ の二等分線,$\angle C$ の外角の二等分線,$\angle A$ の外角の二等分線も，1点 $I_2\left(\overrightarrow{i_2}\right)$ で交わり，

$\angle C$ の二等分線,$\angle A$ の外角の二等分線,$\angle B$ の外角の二等分線も，1点 $I_3\left(\overrightarrow{i_3}\right)$ で交わる

とする。　図3のように，点 E， F を定めたとき，

I_2 は線分BE を $CB{:}CE=(c+a):b$ に外分し， I_3 は線分CF を $AC{:}AF=(a+b):c$ に

外分する ことになるから，　　　　　　　　　　　　　　　　　　同様に，

$$\overrightarrow{i_2}=\frac{-b\times\vec{b}+(c+a)\times\dfrac{c\vec{c}+a\vec{a}}{c+a}}{c+a+(-b)}=\frac{c\vec{c}+a\vec{a}-b\vec{b}}{c+a-b}\ ,\quad \overrightarrow{i_3}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}-c\vec{c}}{a+b-c}$$

内接円の中心 I の位置ベクトル　$\vec{i}=\dfrac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ と比べてみよう。内心と傍心

は，「内分と外分の違い」だけであることがよくわかる。

解説　今回は「超数学 $No.57$」 の続編である。前回，三角形の五心のうち，重心は簡単なので省いて，内心,垂心,外心の位置ベクトルを求めたが，最後の砦ともいうべき「**傍心の位置ベクトル**」が残っていた。傍心は図3のように，三角形の1辺と他の2辺の延長線に接する円（傍接円）の中心である。だから，内接円の中心である内心の仲間であり,位置ベクトルも似ている。今回も「**対称性**」に驚く。そして内分と外分が見事に表現されている。