# $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ とピタゴラス数の不思議な関係

虚数は，すでにこの「山脇の超数学」でたびたび登場してきており，その単位は $i$ である。$\boxed{i^2=-1}$ ということを基礎とする単位であり，もとは $\sqrt{-1}=i$ と書くことから始まった 。虚数の登場によって，あらゆる2次方程式が解けるようになった。それだけにとどまらず，「 $n$ 次方程式は複素数の範囲で，必ず $n$ 個の解を持つ」という代数学の基本定理が証明されたのである。<u>複素数とは，実数と虚数を合わせた数全体を指す。</u>

この定理に厳密な証明を与えたドイツの数学者ガウス（1777～1855）は，さらに「複素数平面」という概念を定着させ、以来 虚数•複素数は数学の重要な道具となっていった。

複素数は $a+bi$ （ $a$，$b$ は実数）と表される。 そして，<u>$b=0$ のときは実数 $a$ を表し，$b\fallingdotseq 0$ のときは虚数を表す</u>とした。複素数の計算で，加法と減法はやさしい。

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ ，　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

とすればよく，これまでの文字式の計算と変わらない計算でよい。

乗法（かけ算）では，　$i^2=-1$　という関係だけ注意すればよい。

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bd\,i^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

割り算は，以下のようなやや複雑な計算をするが，ある性質が発見される。

> $a$，$b$ を自然数とする。（ $a>b$ ）
>
> $$\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2+2abi+b^2i^2}{a^2-(bi)^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$
>
> ここにおいて，$a^2-b^2$，$2ab$，$a^2+b^2$ は「ピタゴラス数」となっている。

(注) 「ピタゴラス数」とは「三平方の定理」（ $p^2+q^2=r^2$ ）を成り立たせる3つの自然数のことである。

例　もっとも小さい自然数から始めて，上の関係を確かめてみよう。

$$\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}=\frac{2^2+4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{4-1+4i}{4-(-1)}=\frac{3+4i}{5}\Longrightarrow$$ (3，4，5) はピタゴラス数，

$$\frac{3+2i}{3-2i}=\frac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3^2+12i+2^2\,i^2}{3^2-2^2\,i^2}=\frac{9-4+12i}{9+4}=\frac{5+12i}{13}\Longrightarrow$$ (5, 12, 13) はピタゴラス数，

$$\frac{5+2i}{5-2i}=\frac{(5+2i)^2}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{25+20i-4}{5^2+2^2}=\frac{21+20\,i}{29}\Longrightarrow$$ (20，21，29) というピタゴラス数を「発見」.

それでは，なぜ複素数の割り算の過程で，ピタゴラス数が生成されるのか？　探究していこう！

# 山脇の超数学講座 No.58

**証明**

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおき，複素数平面上に点 $a+bi$，$a-bi$ をとる。（図1）

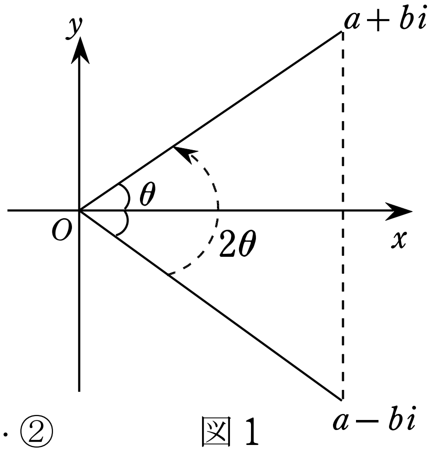


図 1

ここにおいて，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ……①

$$\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r(\cos\theta-i\sin\theta)}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$$

$$=\cos\{\theta-(-\theta)\}+i\sin\{\theta-(-\theta)\}=\cos2\theta+i\sin2\theta \text{ …… ②}$$

ところが，$\cos2\theta$，$\sin2\theta$ は $\tan\theta$ を用いて，次のように表せるから，（「山脇の超数学 No.46 三角関数のヘルパー $\tan(\theta/2)$」参照）

$$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta},\quad \sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

ここに①を代入すると，

$$\cos2\theta=\frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \sin2\theta=\frac{2\left(\dfrac{b}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

これを②に代入すると，$\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$ となって符合する。

さらに，$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$ より，

$\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2=1$，分母を払って，$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ ……(*)

となり，(*) は，$a$，$b$ を整数としたとき，

「すべてのピタゴラス数が $a^2-b^2$，$2ab$，$a^2+b^2$ で表せる」ことの根拠となる式であるので（証明は別の機会に譲りたい），

$\alpha=a+bi$（$a$，$b$ は自然数），$\overline{\alpha}=a-bi$（$\alpha$ の「共役複素数」という）として，

$\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}$ を計算したとき，ピタゴラス数が現れるのは必然である。 **終**

今回示した「複素数の割り算」は「ある複素数をそれと共役な複素数で割る」という特別な場合であり，一般的な「割り算」は次のようになる。

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac-bci+adi-bdi^2}{a^2-(bi)^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

この結果の式の，実部・虚部の分子の式には何か意味がありそうである。考えてみよう！