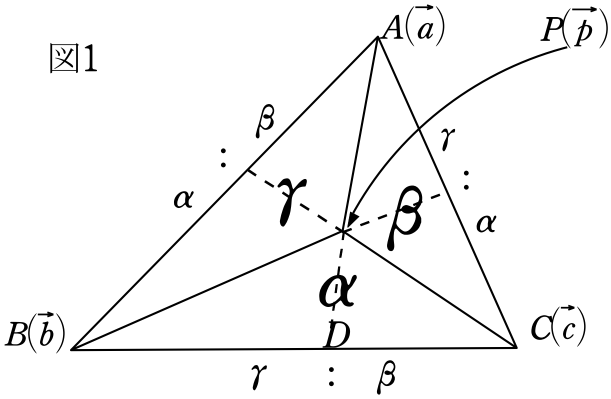
三角形の内心・垂心・外心の位置ベクトル

> 前提
>
> △ ABC の内部に点 P をとり，
>
> $A(\vec{a})$，　$B(\vec{b})$，　$C(\vec{c})$，　$P(\vec{p})$ とする。
>
> $\triangle BPC : \triangle CPA : \triangle APB = \alpha : \beta : \gamma$ のとき
>
> $$\vec{p} = \frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \cdots\cdots (*)$$

図1



証明

図1で，直線 AP と辺 BC の交点を $D(\vec{d})$ とすると，$BD:DC=\gamma:\beta$ だから，

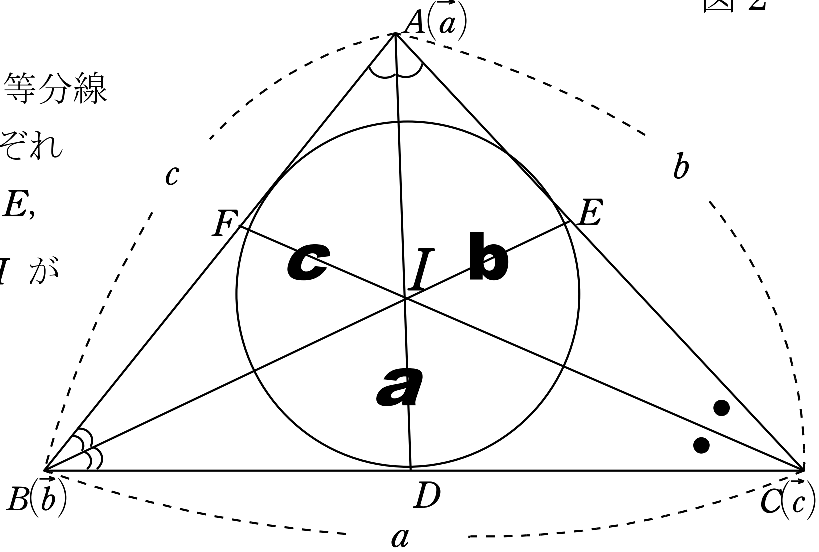
$\vec{d}=\dfrac{\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\beta+\gamma}\cdots$①，面積比から，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}-\vec{a}$

より，　$$\vec{p}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\beta+\gamma}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (\because ①)$$ 終

（＊）は覚えやすい公式である。この公式を，三角形の内心，垂心，外心に応用してみよう。

Ⅰ．内心の位置ベクトル

図 2



△ABC で，∠A，∠B，∠C の二等分線と辺 BC，CA，AB の交点をそれぞれ D，E，F とすると，直線 AD，BE，CF は1点 $I(\vec{i})$ で交わる。この点 I が △ABC の **内心** である。

図2 で「**角の二等分線の定理**」

により，

$BD:DC=c:b$，

$CE:EA=a:c$，$AF:FB=b:a$

これより，　$\triangle BIC : \triangle CIA : \triangle AIB = a:b:c$

よって，(＊) より，

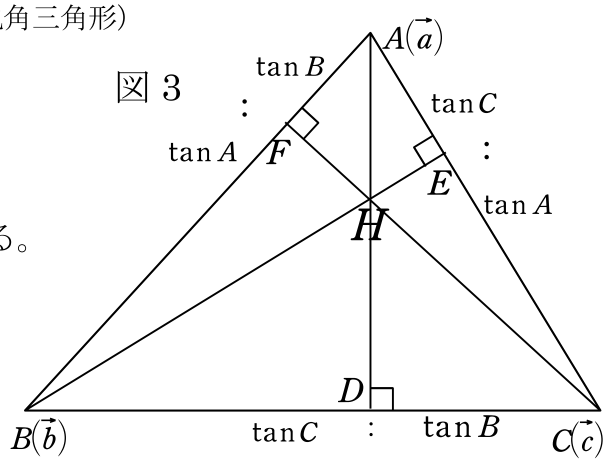
$$\boxed{\vec{i}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}}$$

山脇の超数学講座 No. 57

Ⅱ．垂心の位置ベクトル　（$\triangle ABC$ は鋭角三角形）

$\triangle ABC$ で，頂点 A，B，C より
対辺 BC，CA，AB に下した垂線の足を
それぞれ　D，E，F とすると，
直線 AD，BE，CF は 1 点 $H(\overrightarrow{h})$ で交わる。
この点 H が $\triangle ABC$ の **垂心** である。

図 3



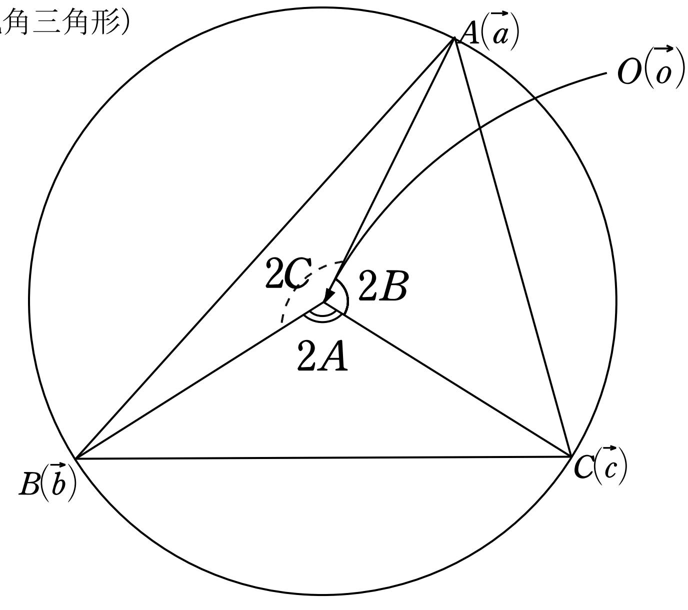
$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で，
$BD\cdot\tan B = CD\cdot\tan C$ ，ゆえに，
$BD : CD = \tan C : \tan B$ ，
同様に，$CE : AE = \tan A : \tan C$ ，$AF : BF = \tan B : \tan A$
図1,2 と同様に考えて，$\triangle BHC : \triangle CHA : \triangle AHB = \tan A : \tan B : \tan C$

ゆえに，(*) より，$$\boxed{\overrightarrow{h} = \frac{(\tan A)\overrightarrow{a} + (\tan B)\overrightarrow{b} + (\tan C)\overrightarrow{c}}{\tan A + \tan B + \tan C}}$$

Ⅲ．外心の位置ベクトル　（$\triangle ABC$ は鋭角三角形）

$\triangle ABC$ の外接円を描いたとき，その中心が
外心 $O(\overrightarrow{o})$ である。外接円の半径を R と
する。円周角と中心角の関係により，
$\angle BOC = 2A$，$\angle COA = 2B$，
$\angle AOB = 2C$　となり，

図 4



$\triangle BOC = \frac{1}{2}R^2 \sin 2A$,

$\triangle COA = \frac{1}{2}R^2 \sin 2B$,

$\triangle AOB = \frac{1}{2}R^2 \sin 2C$　だから，

$\triangle BOC : \triangle COA : \triangle AOB = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$　となる。

よって，(*) より，$$\boxed{\overrightarrow{o} = \frac{(\sin 2A)\overrightarrow{a} + (\sin 2B)\overrightarrow{b} + (\sin 2C)\overrightarrow{c}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}}$$

これが $\triangle ABC$ の　外心 O の 位置ベクトルである。

解説　よく知られている **重心** の位置ベクトル以外にも，三角形の３つの心の「位置ベクトル」が，このように対称的な形で表現できることは驚くべきことである。これは $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C で表し，その対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表している素晴らしさからきている。中でも内心の位置ベクトルが美しいが，三角関数を用いた垂心，外心の位置ベクトルにも魅力がある。