再びラングレーの問題

1922 年 10 月に，イギリスの数学者**エドワード・マン・ラングレー**（1851～1933）によって" A Problem " のタイトルで発表された「ラングレーの問題」が，間もなく 100 周年を迎えようとしている。

再びラングレーの問題

図1のように，$\triangle ABC$ で，頂角 $\angle BAC=20^\circ$, $AB=AC$, $\angle ACD=30^\circ$, $\angle ABE=20^\circ$ となるように，点 D， E をそれぞれ辺 AB, AC 上にとったとき， $\angle BED$ は何度か？

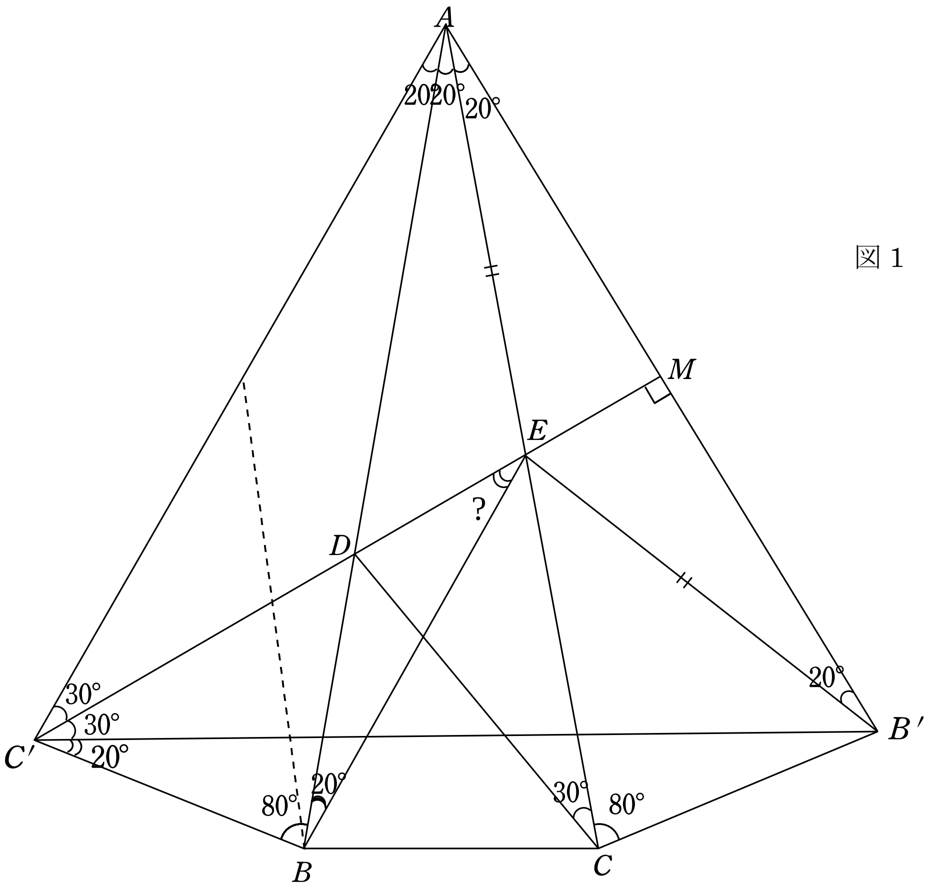


図 1

解答 5

直線 AB を軸として， $\triangle ABC$を対称移動し， $\triangle ABC'$ とする。同様に，直線AC を軸として， $\triangle ACB$を対称移動し， $\triangle ACB'$ とする。

$\triangle AC'B'$ は， 頂角 $\angle C'AB'=60^\circ$, $AC'=AB'$ より 正三角形となり，

$\angle AC'B'=\angle AB'C'=60^\circ$となる。すると, $\angle AC'D=\angle ACD=30^\circ$となるから直線 $C'D$ は$\angle AC'B'$ の二等分線となる。一方， $\angle AB'E=\angle ABE=20^\circ$ となるから， $\triangle EAB'$ は$EA=EB'$ の二等辺三角形となり，底辺 AB'の中点を M とすれば， 辺AB'の垂直二等分線はまず頂点 E を通り，正三角形 $C'AB'$ を考えたとき，頂点 C' も通ることとなる。

つまり，直線 $C'D$ は直線 ME と一致し，4点 C'， D， E， M は一直線上に並ぶ。

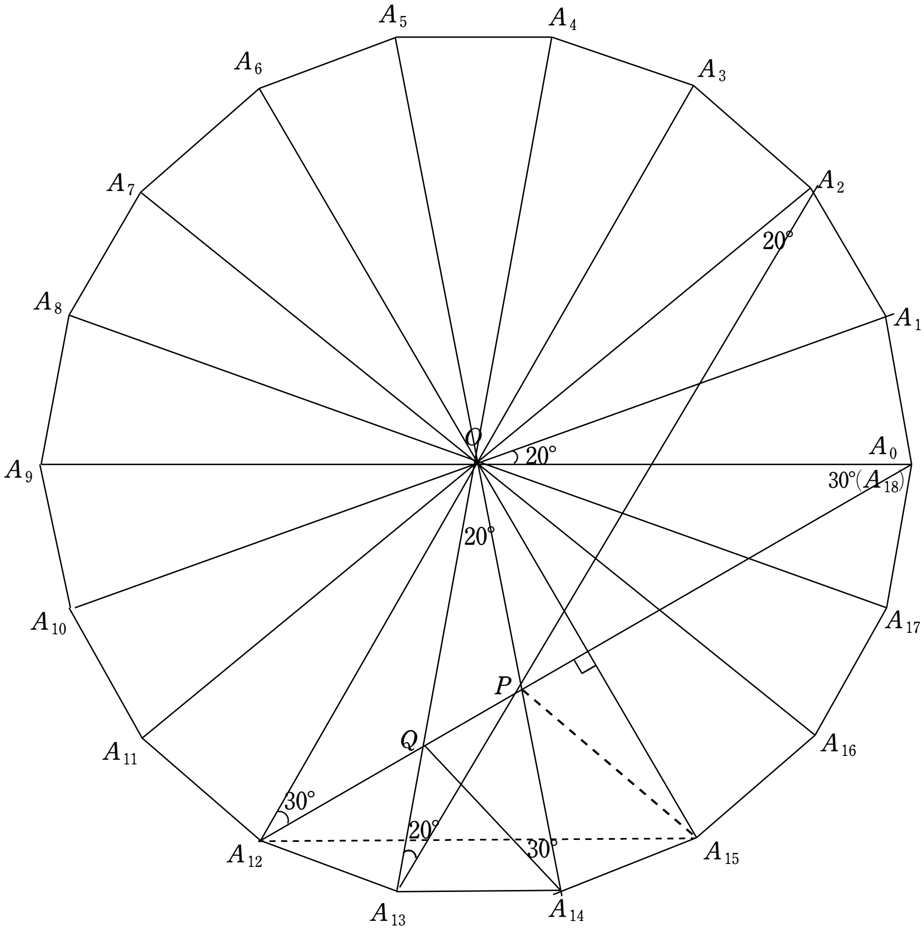
今，図 1 のように， $\triangle EC'B$ で， $\angle EC'B=50^\circ$， $\angle EBC'=80^\circ+20^\circ=100^\circ$ だから，

$\angle BED=\angle BEC'=180^\circ-50^\circ-100^\circ=30^\circ$ と求められる。

山脇の超数学講座 No. 41

「ラングレーの問題」をとり上げるのは3回目。前の2回は，No.25（2020年11月）,No.26（2020年12月）,もう1回は「変形ラングレーの問題」（No.37，2022年5月）です。No.25, 26では，平面図形の定理から求めていく解答と三角関数を用いた解答を，それぞれ2つずつ紹介。今回紹介した5番目の解答 5は，「正18角形」と関係がある特別な解答です。

図 2



ラングレーはあるとき，図2のような正18角形を作図し，その頂点をいくつか結んでいるときに，あることに気づきました。それは，図2の頂点 A_0 と頂点 A_{12} を結んだ直線と頂点 A_2 と頂点 A_{13} を結んだ直線が 線分 OA_{14} 上の点 P で交わるということです。

正18角形は，点 O を中心とする半径 OA_0 の円に内接しますが，その中心角は $360°\div 18=20°$ です。つまり，$\angle A_k O A_{k+1}=20°$ です。($k=0$，1，2，……，17) すると，$\angle A_2 OA_{13}=140°$ となり，$\triangle OA_2A_{13}$ で考えると，$\angle OA_{13}A_2=20°$ となります。一方，$\angle A_0 OA_{12}=120°$ となり，$\triangle OA_0A_{12}$ で考えると，$\angle OA_{12}A_0=30°$ です。点 P で交わる理由は，直線 OA_{13}，OA_{14} を軸として，$\triangle OA_{13}A_{14}$を対称移動したものが，それぞれ$\triangle OA_{13}A_{12}$，$\triangle OA_{14}A_{15}$ であり，解答 5 で証明したことが成り立つからです。ここからラングレーは，$\triangle OA_{13}A_{14}$ だけを取り出して，未知の角 $\angle A_{13}PQ$ を求めさせる問題を考え出したのでした。しかし，この魅力ある図形の角度を求める問題が，まさか21世紀になる100年後まで残るとは思っていなかったことでしょう。