（続）組立除法の威力！

前回と同じ関数　$x^7+x^5+x^3+x$　が　x^2+1　で割り切れるかどうか，「組立除法」に虚数単位 i を導入して考察してみる。$i^2=-1$ を繰り返し用いる。

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
i & & i & -1 & 0 & 0 & i & -1 & 0 \\
\hline
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & i & 0 & 0 & 1 & i & 0 & \boxed{0}
\end{array}
$$

実数係数の方程式が，$x=p+qi$　（p，q は実数）を解にもつとき，$x=p-qi$（共役複素数という）も必ず解にもつから，今度は $-i$ を導入して，

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
 & 1 & i & 0 & 0 & 1 & i & 0 \\
-i & & -i & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
\hline
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{0}
\end{array}
$$

以上ではっきりした。$x^7+x^5+x^3+x$　は　x^2+1 を因数にもち，次のように因数分解できる。

$$x^7+x^5+x^3+x=(x^2+1)(x^5+x)=x(x^2+1)(x^4+1)$$

単純な因数分解だが，なかなか気づかない。$\pm i$ を導入したことの成果である。この因数分解によって，$\underline{f(x)=x^7+x^5+x^3+x \to f(\phi)}$ <u>に再び別解</u>が誕生する。

$\phi^4=3\phi+2$ を利用すると，

$$f(\phi)=\phi(\phi^2+1)(\phi^4+1)=(\phi^2+2\phi)(3\phi+3)=(3\phi+1)(3\phi+3)$$
$$=9\phi^2+12\phi+3 \quad = \quad 21\phi+12$$　となるのである。

ちなみに，$x^4+1=0$　の解は　$x^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$　より，

$$x=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi,\quad \cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\quad \cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$　（複号任意）となるので，

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & i & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) & -1 \\
\hline
 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & i & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) & \boxed{0}
\end{array}
$$

山脇の超数学講座　No. 40

さらに，共役複素数でも組立除法を実行して，

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & i & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & 1-i & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\
\hline
 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ は，　$x^2-\sqrt{2}x+1=0$　の解なので，

$$
\begin{aligned}
x^7+x^5+x^3+x &= (x^2+1)(x^5+x)=x(x^2+1)(x^4+1) \\
&= x(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)
\end{aligned}
$$

と，実数係数範囲での因数分解が完了したのである。

今回の最後に，1の虚数3乗根 ω を「組立除法」に導入してみたい。

$x^3-1=0$ ……(*)　　$\Leftrightarrow$　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$　であるから，

ω は(*)の解，かつ $x^2+x+1=0$ の解だから，　$\omega^3=1$，　$\omega^2+\omega+1=0$ ……⑤

⑤を何度も用いながら，ω の次数を下げていくことに留意する。

（例）x^5+x^4+1　を因数分解せよ。

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\omega & & \omega & \omega^2+\omega & -\omega & -\omega^2 & -1 \\
\hline
 & 1 & \omega+1 & -1 & -\omega & -\omega^2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

ω の共役複素数は　ω^2　であるので，さらに組立除法を進めて，

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & \omega+1 & -1 & -\omega & -\omega^2 \\
\omega^2 & & \omega^2 & 0 & -\omega^2 & \omega^2 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

ω，ω^2 は　$x^2+x+1=0$ の解だから，

$$x^5+x^4+1=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$$　と因数分解できた。

このように，組立除法を拡張し，ϕ　や虚数単位 i，そして虚数3乗根 ω までも扱うことができたことは，非常にスリリングな「実験」であり，経験であった。このような内容は，数学では「代数学」の分野に属し，なかなか興味深いものがある。これもまた数学の姿なのです。　　　　以　上