# 式の計算と組立除法の威力！

次のような式の値を求める問題を考察した。黄金比 $\phi$ が登場する問題である。

１．以下の式の値を計算しなさい。できるだけ簡単に計算できる方法を示せ。

$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{a^7}$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi$ とおくと，

$2\phi-1=\sqrt{5}$　両辺を２乗して，　$(2\phi-1)^2=5$

$\Leftrightarrow\ 4\phi^2-4\phi-4=0\ \Leftrightarrow\ \phi^2-\phi-1=0$　つまり $\phi^2=\phi+1\cdots\cdots$①

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{a^7}=\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi$　となるが，①を用いて，

$\phi^3=\phi^2\cdot\phi=(\phi+1)\phi=\phi^2+\phi=\phi+1+\phi=2\phi+1\ \cdots\cdots$②

$\phi^5=\phi^3\cdot\phi^2=(2\phi+1)(\phi+1)=2\phi^2+3\phi+1=2(\phi+1)+3\phi+1$
$=5\phi+3\ \cdots\cdots$③

$\phi^7=\phi^5\cdot\phi^2=(5\phi+3)(\phi+1)=5\phi^2+8\phi+3=5(\phi+1)+8\phi+3$
$=13\phi+8\ \cdots\cdots$④

$\phi+$②$+$③$+$④　より，

$\phi^7+\phi^5+\phi^3+\phi=(13\phi+8)+(5\phi+3)+(2\phi+1)+\phi=21\phi+12$

ここで，$\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　を代入して，

与式$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^5}+\dfrac{1}{a^7}=21\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+12=\dfrac{45+21\sqrt{5}}{2}$　答

別解　$\dfrac{1}{a}=x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ は，$x^2-x-1=0$ の解である。

与式$=x^7+x^5+x^3+x=f(x)$ とおき，$f(x)\div(x^2-x-1)$　を実行すると，

$f(x)=(x^2-x-1)(x^5+x^4+3x^3+4x^2+8x+12)\ +21x+12$　だから，

$f\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=0+21\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+12=\dfrac{45+21\sqrt{5}}{2}$　答

ここで，$\phi$ の係数となっている　1，1，2，3，5，8，……は，「フィボナッチ数」（超数学No.13-19参照）である。
そこで，フィボナッチ数の一般項を $a_n$ とすると，　（$a_1=1, a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$）

$\phi^n=a_n\phi+a_{n-1}$　（$n\geqq2$）　が成り立つ。

# 組立除法の可能性を拡げる

さきほどの　$f(x)\div(x^2-x-1)$　という計算は，以下のように係数だけ取り出した除法計算によっている。

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 & 12 & & \\ \hline
1\ -1\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & -1 & -1 & & & & & \\ \hline
 & & 1 & 2 & 0 & & & & \\
 & & 1 & -1 & -1 & & & & \\ \hline
 & & & 3 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 3 & -3 & -3 & & & \\ \hline
 & & & & 4 & 4 & & & \\
 & & & & 4 & -4 & -4 & & \\ \hline
 & & & & & 8 & 4 & 1 & \\
 & & & & & 8 & -8 & -8 & \\ \hline
 & & & & & & 12 & 9 & \\
 & & & & & & 12 & -12 & -12 \\ \hline
 & & & & & & & 21 & 12
\end{array}
$$

さて，1次式で割るときに有効な方法が「組立除法」であるが，ここでは思い切って　$x-\phi$　で割るという「組立除法」を試みてみた。

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\phi & & \phi & \phi+1 & 3\phi+1 & 4\phi+3 & 8\phi+4 & 12\phi+8 & 21\phi+12 \\ \hline
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & \phi & \phi+2 & 3\phi+1 & 4\phi+4 & 8\phi+4 & 12\phi+9 & \boxed{21\phi+12}
\end{array}
$$

「組立除法」では，「$x-\phi$　で割る」際に，まず$\phi$を書き，この場合，$x^7$の係数「1」を下ろしてきて，$\phi$とかけて右上に書く，ということを繰り返していく。
ここで，$\phi\times\phi=\phi^2=\phi+1$　と$\phi$の1次式にしたものを書くようにする。
以下，$\phi\times(\phi+2)=\phi^2+2\phi=3\phi+1$，　$\phi\times(4\phi+4)=4\phi^2+4\phi=8\phi+4$，
というように計算していくと，見事に最後が　$21\phi+12$　で終了する。
これが，$x^7+x^5+x^3+x$　を $x-\phi$　で割ったときの余りの定数であり，
ここに $\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を代入すれば，代入計算が完了する。

　このように「組立除法」の可能性が拡げられたわけだが，実数の世界にとどまらず，例えば「$x^2+1$　で割る」という際に，虚数 $i$ で同様な組立除法をすることが可能である。試してみるとおもしろいでしょう。