ラマヌジャンの問題を！

シュリニヴァーサ・ラマヌジャン（1887―1920）はインドの数学者であり，神秘的なアジアの鬼才とも呼ばれている。幼時から数値の異常な記憶力を示し，独学で数学を研究した。彼は，自分の研究成果を評価してもらおうとイギリスの数学者に手紙を送り始めた。なかなか評価は得られなかったが，粘り強く手紙を出し続けるうちに，ケンブリッジ大学の数学教授ハーディー（1877～1947）の目にとまる。ハーディーの尽力によって，彼は1914年にケンブリッジ大学に招かれた。そこからハーディーとの共同研究が始まり，分割数公式，高次合成数理論など歴史的な大論文が次々と生み出されたのである。ラマヌジャンがまだインドにいる時代に，『インド数学会ジャーナル』に投稿した問題が，以下の問題である。結局当時のインドの数学者は誰も解答できず，ラマヌジャン自身が自分で答えることになったといわれる。

問題 **1**　　以下の数の値を求めよ。

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots\cdots}}}}}$$

解答

n を自然数として，$f(n)=n(n+2)\cdots\cdots(*)$　とおく。

$f(n+1)=(n+1)(n+3)=n^2+4n+3=(n+2)^2-1$

よって，$(n+2)^2=1+f(n+1)$

$n+2>0$　より，　$n+2=\sqrt{1+f(n+1)}$

これを $(*)$ に代入すると，

$f(n)=n\sqrt{1+f(n+1)}\ \cdots\cdots$ ①

これは漸化式である。①で，$n\to n+1$　とすれば，

$f(n)=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$

これを繰り返せば，

$f(n)=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{1+\cdots}}}}}$

と「多重根号式」ができる。ここで，$n=1$ とすれば，

$f(1)=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots\cdots}}}}}$

$(*)$ より，$f(1)=1\times3=3$

したがって，$\underline{\underline{\text{与式}=3}}$ が得られる。

解説　この問題の背景には，「差が2である2つの数の積に1を加えると，その2数の中央の数の平方になる」という性質がある。

（例）　$1+2\times4=3^2$，$1+3\times5=4^2$，……　この「差が2である2つの数の積」こそが　$f(n)=n(n+2)$　なのである。もっともこの関係は　$1+(k-1)(k+1)=k^2$　とも書くことができるから，自然数でなくても，任意の数 k について成り立つといえる。

しかし，この関係から上の問題のような「多重根号」を思いつくラマヌジャンはすごい。

問題 **2**

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\cdots}}}}}}}$$ の値を求めよ。

ただし，符号は−，＋，＋の順で，周期 3 で繰り返す。

解答

$$\begin{cases} x=\sqrt{2-y} & \cdots\cdots ① \\ y=\sqrt{2+z} & \cdots\cdots ② \\ z=\sqrt{2+x} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

という 連立方程式を考える。②を①に代入すれば,

$x=\sqrt{2-\sqrt{2+z}}$ ……④　　が生まれる。次に③を④に代入して,

$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$ ……⑤　　という，またしても「多重根号式」が登場する。

今度は，⑤に⑤自身を代入すると,

$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}}$ ……⑥　　が誕生する。繰り返せば,

$x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots\cdots}}}}}}}}$ と問題の式になる。

よって，求めるべき値は，連立方程式①～③の解 のうち，x である。

このような数は存在するのだろうか？　　存在するのだ。

$(x,\ y,\ z)=(2\sin 10^\circ,\ 2\cos 20^\circ,\ 2\cos 40^\circ)$ が ①～③の解なのである。

半角の公式　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$，　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　を用いると,

$4\sin^2 10^\circ=2-2\cos 20^\circ$　が成り立ち，$2\sin 10^\circ>0$ より,

$x=2\sin 10^\circ=\sqrt{2-2\cos 20^\circ}=\sqrt{2-y}$,

$4\cos^2 20^\circ=2+2\cos 40^\circ$　が成り立ち，$2\cos 20^\circ>0$　より,

$y=2\cos 20^\circ=\sqrt{2+2\cos 40^\circ}=\sqrt{2+z}$，　同様に,

$z=2\cos 40^\circ=\sqrt{2+2\cos 80^\circ}$　が成り立つ。　ところが，ここで劇的に,

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$　によって，$\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ$ が成り立って,

$z=\sqrt{2+2\sin 10^\circ}=\sqrt{2+x}$　となり，連立方程式　①～③ が完成・完結する。

したがって，求める値は　$\underline{2\sin 10^\circ=2\sin\dfrac{\pi}{18}}$ 答

解説　この問題は，三角関数の「循環性」をうまく利用した連立方程式から生まれた。この循環性は，三角関数の特性である「周期性」から生み出されるものである。つまり「三角関数の値は繰り返す」，「三角関数の値は相互に深い関連をもっている」という事実だ。それを，0°から 90°の範囲のループとして見事に表現したのが連立方程式①～③であり，そこからまたしても，ラマヌジャンは「多重根号」を思いついたわけである。1919 年，病気がちであったラマヌジャンはインドへ帰り，故郷で療養することになった。数学の研究は進み，「擬テータ関数」という新理論を編み出した，とハーディーに簡単な説明を書き送っている。結局病は回復することなく，1920 年，彼は 32 歳の若さで世を去った。彼の定理の証明作業が完了したのは何と 1997 年のことである。彼の数学の発想は極めて独創的・魅力的であり，今なお，数学を学ぶ者を魅了し続けている。