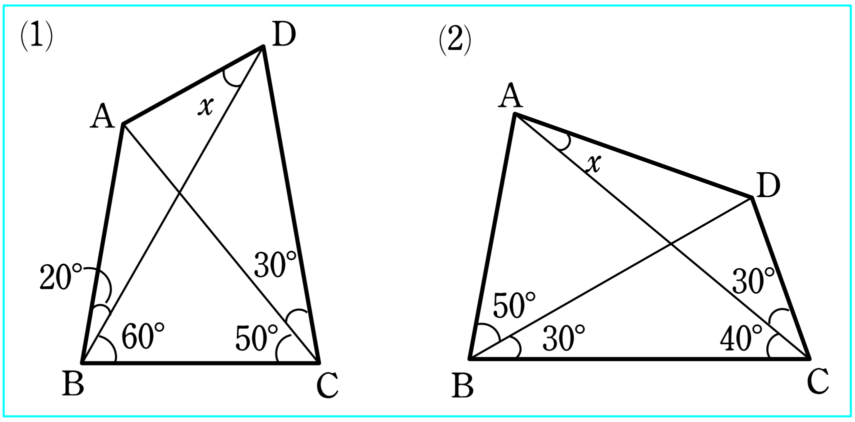
「変形ラングレーの問題」

以下の 2 つの問題の左側は，私が「山脇の超数学 No25」(2020 年 11 月)，「同 No26」(同 12 月)で，「**ラングレーの問題**」として取り上げた問題である。イギリスの数学者ラングレー（1851～1933）によって，1922 年にこの問題が発表されてから今年でちょうど 100 周年にあたる。今回は，ラングレーの問題と同じ四角形（以前取り上げたときは三角形だったが，今回は切り取って四角形にしてある）でありながら，問う角度を変えている「変形ラングレーの問題」〔右側の(2)の問題〕に取り組んでみたい。

右の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



この問題では，まず以下のような平面幾何の性質を利用した解法が考えられる。だが，問う角度を変えられると「ラングレーの問題」で使用した方法が使えなくなるから不思議である。ここでは，三角形 ABC の外接円の中心，すなわち外心を取るところから始まる。60° という角度があるので正三角形を作りやすいからである。続いて「ラングレー」と同じく二等辺三角形を見つけて，未知の角をどんどん求めていく。

解答 1

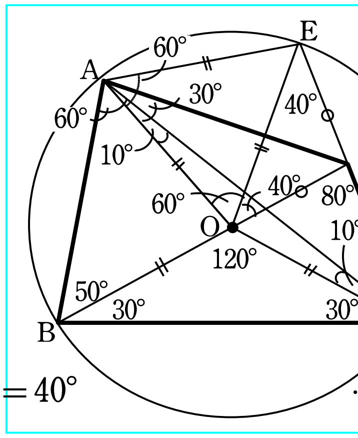


図 1

$\triangle ABC$ の外心をとり，O とする。円周角と中心角の関係より，$\angle \mathrm{BOC}=2\angle BAC=2\times 60^\circ=120^\circ$ ……①

ここで，線分 CD の延長と円 O の交点を E とすると

$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}$，　$\angle \mathrm{AOE}=2\angle \mathrm{ACE}=2\times 30^\circ=60^\circ$

よって，$\triangle \mathrm{OAE}$ は正三角形となり，$\mathrm{AE}=\mathrm{AO}$ ……②

また，$\triangle \mathrm{OCE}$ は $\mathrm{OC}=\mathrm{OE}$ の二等辺三角形であるから

$\angle \mathrm{OED}=\angle \mathrm{OCD}=\angle \mathrm{OCA}+\angle \mathrm{DCA}=(40^\circ-30^\circ)+30^\circ=40^\circ$ ……③

$\triangle \mathrm{DBC}$ において　$\angle \mathrm{BDC}=80^\circ$

また，$\triangle \mathrm{DEO}$ の内角と外角の性質により　$\angle \mathrm{DOE}=80^\circ-40^\circ=40^\circ$ ……④

③，④ より，$\triangle \mathrm{DEO}$ において　$\mathrm{DE}=\mathrm{DO}$，また　$\mathrm{AD}=\mathrm{AD}$　(共通) ……⑤

②，⑤ から，　$\triangle \mathrm{AED}\equiv\triangle \mathrm{AOD}$

よって　$\angle \mathrm{EAD}=\angle \mathrm{OAD}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{OAE}=\dfrac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

また，$\triangle \mathrm{OAC}$ において $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$ であるから　$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{OCA}=10^\circ$

したがって　$\angle x=\angle \mathrm{OAD}-\angle \mathrm{OAC}=30^\circ-10^\circ=20^\circ$　答

山脇の超数学講座 No. 37

さて次に，今回も以前にも試みたような「三角関数を用いた解」を紹介したい。とにかく「正弦定理」を駆使する。（＊）の等式についてはかなり有名な関係で，この *cos* 版が「山脇の超数学 No25」の証明で使われた。最後の D と D' の同一性については工夫を要する。「円周角の定理の逆」の証明などに使われる手法である。　これで「補助線を引かなくても角度が求められる方法」を考案したことになるが，もう少し簡潔にできないかを今後の探究課題としたい。

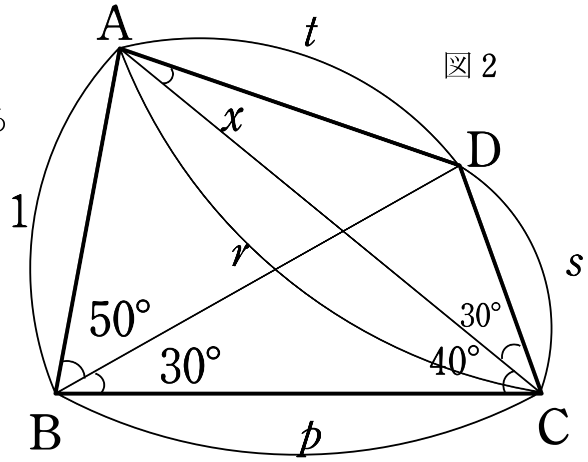


図 2

解答2

$AB=1$ としても一般性を失わない。

また，右の図2 のように辺の長さを与える

$\triangle ABC$ で正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin 40^\circ}=\frac{r}{\sin 80^\circ}=\frac{p}{\sin 60^\circ}$$

$\sin 80^\circ=2\sin 40^\circ\cos 40^\circ$ だから，

$r=2\cos 40^\circ=2\sin 50^\circ$ ……①

$p=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 40^\circ}$ ……②

次に，$\triangle DBC$ で正弦定理より，

$$\frac{p}{\sin 80^\circ}=\frac{s}{\sin 30^\circ}=2s$$

②を代入して，$s=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 80^\circ\sin 40^\circ}$，

ところが，$\sin 80^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ……(＊)

式変形すると，$2\sin 20^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 80^\circ\sin 40^\circ}$，

ゆえに，$s=2\sin 20^\circ$ ……③

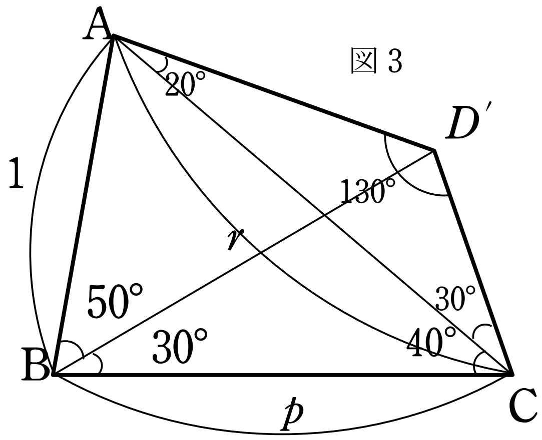


図 3

①，③より，$\dfrac{s}{\sin 20^\circ}=\dfrac{r}{\sin 50^\circ}=2$ ……④

さらに，$\triangle DAC$ で正弦定理より，$\dfrac{s}{\sin x}=\dfrac{r}{\sin\angle ADC}=\dfrac{t}{\sin 30^\circ}=2t$ ……⑤

今，図3 のように，頂点 A，C より線分 AC とそれぞれ 20°，30° をなすように直線を引き，その交点を D' とすると，$\angle AD'C=130^\circ$

$\triangle D'AC$ で正弦定理を適用すると，$\dfrac{CD'}{\sin 20^\circ}=\dfrac{r}{\sin 130^\circ}=\dfrac{r}{\sin 50^\circ}=2$　（∵④）

よって，$CD'=2\sin 20^\circ$，　これと③より，　$CD'=s=CD$

これにより，AC 共通，$CD=CD'$，$\angle DCA=\angle D'CA$ から，$\triangle DAC\equiv\triangle D'AC$

したがって，　$\angle DAC=20^\circ$

逆に，このとき，④，⑤ が同値となり，$2t=2$ より，$t=1$

$t=1$ のとき，$\angle ADB=50^\circ$ となり，$\angle ADC=130^\circ$，$\angle DAC=20^\circ$ となり，

点 D と点 D' は一致する。　以上より，　$x=20^\circ$ 答