三角関数のグラフと黄金比

□ $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ のグラフの関係と黄金比

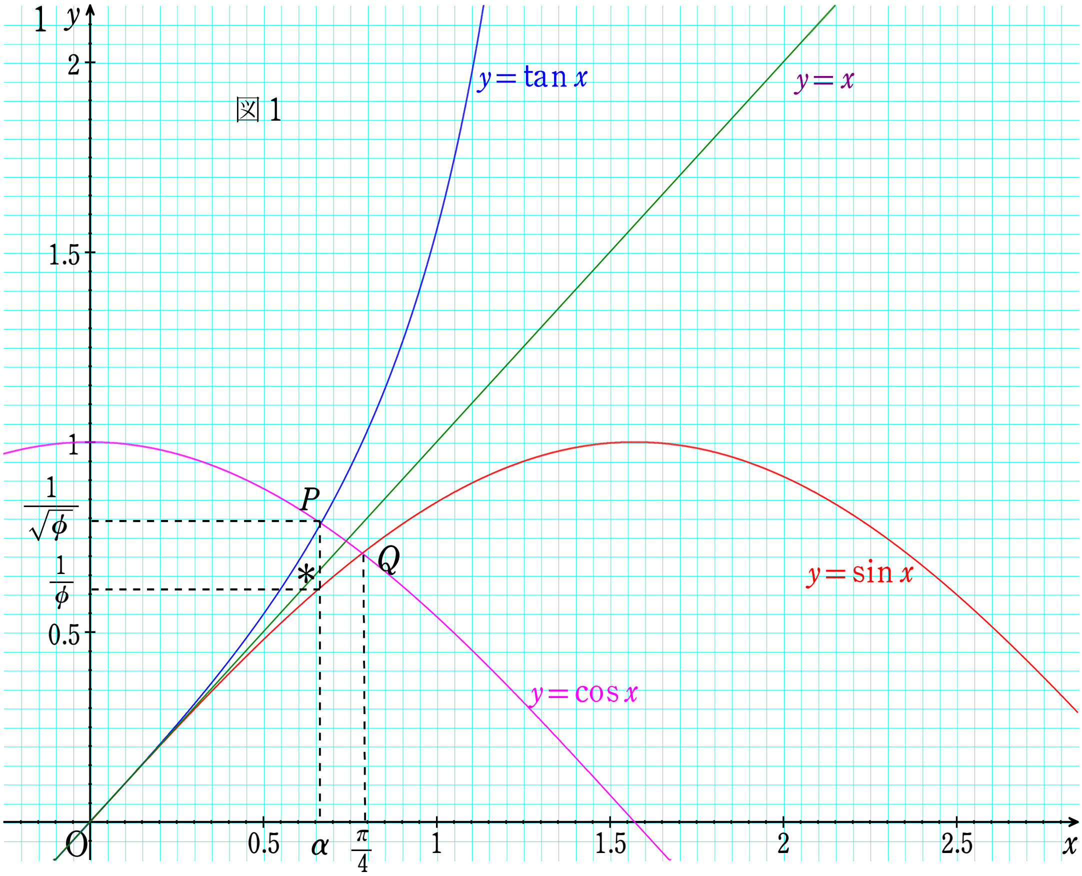

図1のように，第1象限での　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$　のグラフの関係を調べてみると，2曲線 $y=\sin x$, $y=\tan x$ は原点において接している。

2曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x$　は，点 $Q\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で交わっている。さらに，次の方程式，

$\cos x=\tan x$ …① を解く。①$\Leftrightarrow$　$\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$　$\Leftrightarrow$　$\cos^2 x=\sin x$ …②　$\Leftrightarrow$

$1-\sin^2 x=\sin x$,　$\sin x=t$　とおくと，　$t^2+t-1=0$　かつ　$t>0$　より，

$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，ここで 黄金比　$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いれば，　$\sin x=\frac{1}{\phi}$　となり，

①,② より，$\cos x=\tan x=\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ …③ となる。ここでいったん　$\sin\alpha=\frac{1}{\phi}$ と定めれば，

2曲線　$y=\cos x$, $y=\tan x$　は，点 $P\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{\phi}}\right)$　で交わることになるのである。

山脇の超数学講座 No. 32

３つの三角関数のグラフで囲まれた図形

ここで，$f(x)=\cos x$，$g(x)=\tan x$ とおくと，$f'(x)=-\sin x$，$g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

それぞれ点 P における接線の傾きは，$f'(\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{\phi}$，$g'(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\phi$（∵③）

$\Longrightarrow$ $f'(\alpha)\cdot g'(\alpha)=-1$ より，2 曲線 $y=\cos x$，$y=\tan x$ の接線は点 P にて直交する。

すなわち，2曲線 $y=\cos x$，$y=\tan x$ は 点 $P\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\sqrt{\phi}}\right)$ において直交しているのだ。

3 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ で囲まれた図形 $(*)$（弧 OP，PQ，QO で囲まれた図形）の面積を求めることもできる。図形 $(*)$ の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\alpha}\tan x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\alpha}+\Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log|\cos\alpha|+\log 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=-\log\frac{1}{\sqrt{\phi}}+\sqrt{2}-\frac{1}{\phi}-1=\frac{1}{2}\log\phi+\sqrt{2}-\frac{1+\phi}{\phi}\ ,\qquad \phi+1=\phi^2\text{より}$$

$$S=\frac{1}{2}\log\phi+\sqrt{2}-\phi=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{となる}$$

このようにして，3つの三角関数のグラフで囲まれた図形の面積は，

黄金比の自然対数の $\dfrac{1}{2}$ と $\sqrt{2}$ の和 より 黄金比 を引いた値になっている。そのことが

三角関数の積分によって見事に解明されたといえる。

この図形を「**黄金比トライアングル**」と呼んでもよいだろう。

この図形を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積は？，あるいはこの図形を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積は？　という疑問が起こってくる。きっと黄金比で表されるに違いないのだが，それは次の機会に譲ることにしよう。