倍数判定法

山脇の超数学講座 No. 28

小学校の頃から，ある整数が２の倍数（偶数）なのか，３の倍数なのか，４の倍数なのか，５の倍数なのか，………を判定する方法について，教えてもらったことと思います。

$\boxed{1}$. ２の倍数は，一の位の数が偶数である。
$\boxed{2}$. ５の倍数は，一の位の数が　０か５　である。

これはもっとも有名なものです。$\boxed{1}$は，一の位が 0，2，4，6，8　であれば２の倍数，一の位が 1，3，5，7，9　であれば２の倍数でない整数（奇数）であるところからきています。
$\boxed{2}$は，私たちが使用している数が「**10 進法**」にしたがっていることが理由です。一の位が 0 であれば 10 の倍数であるわけですから，10÷2　として求められる５　としては，一の位が　0 であれば５の倍数であるし，それに５を加えた「一の位が５の数」も５の倍数であることは当然です。このように「倍数判定法」は「10 進法」と固く結びついています。

$\boxed{3}$. ４の倍数は，下２桁の整数が４の倍数である（４で割り切れる）。
$\boxed{4}$. ８の倍数は，下３桁の整数が８の倍数である（８で割り切れる）。

この２つの性質は，それぞれ 100 が４の倍数である，1000 が８の倍数であることが理由となっています。
例をあげれば，1288　は８の倍数です。なぜなら，$1288=1000+288=8\times125+\underline{8\times36}$ となり，1000 は８の倍数であることがわかっているので，下３桁のみ注目して，その整数が８で割り切れれば「８の倍数」と判定できるわけです。

$\boxed{5}$. ３の倍数は，各位の数の和を求め，その和が３の倍数である（３で割り切れる）。
$\boxed{6}$. ９の倍数は，各位の数の和を求め，その和が９の倍数である（９で割り切れる）。

この判定法も有名なもので，中学校入試や高校入試の問題にも登場し，中学生・高校生は知っておかなければならないものですが，もちろん「10 進法」と結びついています。
まずは，９の倍数から。

３桁の自然数で考えてみましょう。百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a，b，c とすると，
$100a+10b+c=(10^2-1)a+(10-1)b+a+b+c=9(11a+b)+a+b+c$　となり，
$9(11a+b)$ は９の倍数だから，各位の数の和　$a+b+c$　が９の倍数であれば，$100a+10b+c$ は９の倍数であることが保証されます。

一般に n を自然数とすると，「10^n-1」は必ず「9の倍数」であるので，３桁の自然数と同じような式変形で，「9の倍数＋各位の数の和」という形に書き表せますから，各位の数の和が９の倍数であればよいのです。さらに「10^n-1」は必ず「３の倍数」でもあるので，各位の数の和が３の倍数であれば，３の倍数であることが保証されます。ちなみに，各位の数の和を９または３で割った余りは，それぞれ「もとの数を９または３で割った余り」にもなっています。

□ 合同式と倍数判定法

ここで「高校数学A」で学習する「合同式」を使って考察してみましょう。
10 は９で割ると１余ります。このことを合同式を使って書くと，$10\equiv1\ (mod\ 9)$ …① となります。
「mod」はラテン語から派生した英単語「modulo」の略で，「法」という意味があり，「法」とは「割る数」のことです。①は，「10 と１は，９で割った余りが等しい（≡）」という意味があります。
そして，合同式には，$10^n\equiv1^n\equiv1\ (mod\ 9)$ という性質があり，10^n も９で割ると１余ります。故に，
$10^n\times a_n+10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots\cdots+10^2\times a_2+10\times a_1+a_0\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1+a_0\ (mod\ 9)$
となり，各位の数の和 $a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1+a_0$ は９で割った余りで，これが９で割り切れればよいことになります。

$\boxed{7}$. ７の倍数は，下の位から３桁ごとに区切って，符号を変えながら（下から奇数番目はプラス，偶数番目はマイナスとして）加えた結果が，０か７の倍数である。

具体的な例としては，164892 の場合，まず　164：892　と３桁ごとに区切り，892－164 を計算すると，728 となり７の倍数です。したがって，164892　も７の倍数となります。合同式を使うと，
$10\equiv3\ (mod\ 7)$　ですが，　$10^3\equiv3^3\equiv27\equiv-1\ (mod\ 7)$　となります。つまり，$10^3+1=1001$ は 7の倍数なのです。$10^6\equiv(10^3)^2\equiv(-1)^2\equiv1\ (mod\ 7)$ ですから，$10^6-1=999{,}999$ は7の倍数です(*)。
$164892=164\times10^3+892=164\times(10^3+1)-164+892=7\times143\times164+892-164$　となり，
892－164 が７の倍数であるかどうかを調べればよいことがわかりました。
９桁の数 N が，$N=a\times10^6+b\times10^3+c$　と表せた場合，a，b，c は「下の位から３桁ごとに区切った数」であり，$c-b+a$　が７の倍数であれば，N も７の倍数であることが(*)よりよくわかります。

「**６の倍数**」は，$\boxed{1}$（２の倍数）と　$\boxed{5}$（３の倍数）をともに満たしていればよいのです。
以上の考察により，2～9 までの倍数判定法がすべてわかりました。
それでは，次のことが成り立つ理由を考えてみて下さい。
$\boxed{8}$. 11 の倍数は，各位の数について，下１桁から奇数番目はプラス，偶数番目はマイナスとして加えた結果が，０か 11 の倍数である。

以上