

$\tan(n\theta)$ の魅力



今回は、これまでもたびたび登場した正接 $\tan \theta$ の「 n 倍角公式」を導いてみたい。

1. 手始めに $\tan 2\theta$ (2倍角) を考えてみよう。いろいろな求め方があるが、

$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ と $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ を利用したい。

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$, $\cos \theta \neq 0$ として、分母・分子を $\cos^2 \theta$ で割ると、

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \text{として, 「2倍角公式」が完成した。同様に,}$$

$$\begin{aligned} \tan 3\theta &= \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta}{4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta} = \frac{3 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} - 4 \cdot \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta}}{4 - 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{3 \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) - 4 \tan^3 \theta}{4 - 3(1 + \tan^2 \theta)} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \quad \text{として,} \end{aligned}$$

「3倍角公式」が完成した。一方、加法定理に基づいて、

$$\begin{aligned} \tan 3\theta &= \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \cdot \tan \theta} = \frac{\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + \tan \theta}{1 - \frac{2 \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}} \\ &= \frac{2 \tan \theta + (1 - \tan^2 \theta) \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta - 2 \tan^2 \theta} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \quad \text{としても, 完成できる。} \end{aligned}$$

2. $\tan(n\theta) = \tan n\theta$ はどのようにして求められるのか? 加法定理より,

$$\tan(n+1)\theta = \frac{\tan n\theta + \tan \theta}{1 - \tan n\theta \cdot \tan \theta} \quad \cdots (*) , \quad \tan n\theta = a_n, \quad \tan \theta = t \quad \text{とおくと,}$$

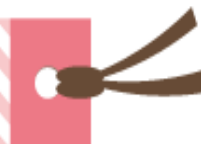
$$a_{n+1} = \frac{a_n + t}{1 - t a_n} \quad \cdots (**) \quad \text{となり, 加法定理の式(*)は 漸化式(**) となった。}$$

ここで特性方程式 $x = \frac{x+t}{1-tx}$ を解くと, $-tx^2 = t \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$

$$a_{n+1} - i = \frac{a_n + t}{1 - t a_n} - i = \frac{(1 + it) a_n + t - i}{1 - t a_n} = \frac{(1 + it) a_n - i(1 + it)}{1 - t a_n} = \frac{1 + it}{1 - t a_n} (a_n - i) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に, } a_{n+1} + i = \frac{1 - it}{1 - t a_n} (a_n + i) \quad \cdots \textcircled{2}$$

山脇の超数学講座 No. 61



$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ より, } \frac{a_{n+1}+i}{a_{n+1}-i} = \frac{1-it}{1+it} \cdot \frac{a_n+i}{a_n-i}, \quad \text{ここで, } b_n = \frac{a_n+i}{a_n-i} \text{ とおくと,}$$

$$b_{n+1} = \frac{1-it}{1+it} b_n, \quad \text{初項については, } a_1 = t \text{ より, } b_1 = \frac{t+i}{t-i} = \frac{i(t+i)}{i(t-i)} = -\frac{1-it}{1+it}$$

$$\text{となるので, } \{b_n\} \text{ は, 初項 } -\frac{1-it}{1+it}, \text{ 公比 } \frac{1-it}{1+it} \text{ の等比数列で, } b_n = -\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n,$$

$$\text{戻して, } \frac{a_n+i}{a_n-i} = -\frac{(1-it)^n}{(1+it)^n} \Leftrightarrow \{(1+it)^n + (1-it)^n\}a_n = -i\{(1+it)^n - (1-it)^n\}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -i \cdot \frac{(1+it)^n - (1-it)^n}{(1+it)^n + (1-it)^n}$$

$$\text{さらに戻して, } \boxed{\tan n\theta = -i \cdot \frac{(1+i\tan\theta)^n - (1-i\tan\theta)^n}{(1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n}}$$

何と正接の n 倍角公式は、虚数 i を含む式となってしまった。

$$\text{しかし, } n=2 \text{ とすると, } \tan 2\theta = -i \cdot \frac{4i \tan \theta}{2(1-\tan^2 \theta)} = \frac{2 \tan \theta}{1-\tan^2 \theta},$$

$$n=3 \text{ では, } \tan 3\theta = -i \cdot \frac{2(3i \tan \theta + i^3 \tan^3 \theta)}{2(1-3 \tan^2 \theta)} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1-3 \tan^2 \theta} \text{ となり, } i \text{ は消える。}$$

3. 複素数平面における “ド・モアブルの定理” を活用する。

$$\text{“ド・モアブルの定理” により, } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}^n = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{\textcircled{3} + \textcircled{4}}{2} \text{ より, } \cos n\theta = \frac{1}{2} \{(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n\}$$

$$\frac{\textcircled{3} - \textcircled{4}}{2} \text{ より, } \sin n\theta = -\frac{i}{2} \{(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n\}, \quad \text{そして,}$$

$$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = -i \cdot \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n},$$

さらに、右辺の分母・分子を $(\cos \theta)^n = \cos^n \theta$ で割ることにより、

$$\boxed{\tan n\theta = -i \cdot \frac{(1+i\tan\theta)^n - (1-i\tan\theta)^n}{(1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n}} \quad \text{が完成する。}$$

解説 「漸化式」の「一般項」を求める方法で $\tan \theta$ の「 n 倍角公式」を導いてみた。

その公式には虚数 i が含まれている。別解 (3) は、そもそもド・モアブルの定理が「加法定理」から導かれるわけだから、当然の帰結とも言える。