2022に因んだ問題を考える

今年は2022年。毎年のことですが，その年の数に因んだ入試問題が多く出題されています。それを予想して年頭に問題を作成してみました。

第1問　2022 の約数の個数と約数の総和を求めよ。
1 ～ 2022 までの自然数で，2022と互いに素である整数の個数を求めよ。

解答　$2022=2\times3\times337$　と素因数分解されるので，
約数の個数は，$2\times2\times2=8$ (個)
約数の総和は，$(1+2)(1+3)(1+337)=4056$
2022と互いに素である整数の個数
1 ～ 2022 までの自然数で，k の倍数の個数を $n(k)$ と書くと，求める個数は，

$$2022-\{n(2)+n(3)+n(337)-n(6)-n(674)-n(1011)+n(2022)\}$$
$$=2022-(1011+674+6-337-3-2+1)=672\ (\text{個})$$

となるが，これを一気に計算するのが，「オイラー関数」であり，

$$2022\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{337}\right)=2022\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{336}{337}=672\ (\text{個})$$

第2問　2022! を計算したとき，末尾には 0 が何個並ぶか？

解答　2022! の末尾の 0 の個数は，2×5 の組が何個あるかを数えればよいが，2022! を素因数分解したときに，素因数 2 の個数は素因数 5 の個数をはるかに上回る。ゆえに，末尾の 0 の個数は素因数 5 の個数と一致する。これを次のようにガウス記号を使って表現する。$[x]$ は，x を超えない最大の整数を表す。

$$\left[\frac{2022}{5}\right]+\left[\frac{2022}{5^2}\right]+\left[\frac{2022}{5^3}\right]+\left[\frac{2022}{5^4}\right]=404+80+16+3=503\ (\text{個})$$

これは「ルジャンドルの定理」に従っている。

第3問　$x^2+2022^2=y^2$　となる自然数 $(x,\ y)$ を求めよ。
ただし，$x>2022$　とする。

解答　式変形によって，$(y+x)(y-x)=2^2\cdot3^2\cdot337^2$ ……①
$y+x$，$y-x$ の偶奇は一致し（ともに偶数またはともに奇数），しかも①より，$y+x$，$y-x$ はともに偶数である。

$$\begin{cases} y+x=2a \\ y-x=2b \end{cases} \cdots\cdots ②$$

（a，b は自然数，$a>b$ ）　とすると，

$ab=3^2\times337^2$　となる。ab の約数は，$3\times3=9$ (個)　あるが，$a>b$ となるのは，$a=b$ の場合を除いた半分の 4個 である。

山脇の超数学講座 No. 35

$(a,\ b)=(3^2\times337^2,\ 1),\ (3\times337^2,\ 3),\ (337^2,\ 3^2),\ (3^2\times337,\ 337)$

②より，$y=a+b$，$x=a-b$ だから，求める自然数の組は，

$(x,\ y)=(1022120,\ 1022122)$，$(340704,\ 340710)$，

$(113560,\ 113578)$，$(2696,\ 3370)$ 答

第4問　$x+y=6,\ xy=1$ のとき，$x^{2022}+y^{2022}$ を 7 で割った余りを求めよ。

解答　$x,\ y$ は $t^2-6t+1=0$ の解である。$t\neq0$ より，両辺に t^n（n は自然数）をかけると，$t^{n+2}-6t^{n+1}+t^n=0$

ゆえに，$x^{n+2}-6x^{n+1}+x^n=0$，$y^{n+2}-6y^{n+1}+y^n=0$

$S_n=x^n+y^n$ とおくと，$S_{n+2}-6S_{n+1}+S_n=0 \iff S_{n+2}=6S_{n+1}-S_n$ (*)

7を法とすると，$S_1\equiv6$，$S_2=(x+y)^2-2xy=6^2-2=34\equiv6$

(*) より，
$S_3=6S_2-S_1\equiv6\times6-6\equiv30\equiv2$，
$S_4=6S_3-S_2\equiv6\times2-6\equiv6$，
$S_5=6S_4-S_3\equiv6\times6-2\equiv34\equiv6$，
$S_6=6S_5-S_4\equiv6\times6-6\equiv30\equiv2$ 以下，これを繰り返す。

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ として，帰納的に $S_{3k-2}\equiv S_{3k-1}\equiv6$，$S_{3k}\equiv2\ (mod\ 7)$

$2022\equiv0\ (mod\ 3)$ だから，$S_{2022}=x^{2022}+y^{2022}\equiv2\ (mod\ 7)$ 答

第5問　$x+y=-1,\ xy=1$ のとき，$x^{2022}+y^{2022}$ の値を求めよ。

解答　$x,\ y$ は $t^2+t+1=0$ の解である。

ところが，$(t-1)(t^2+t+1)=t^3-1=0 \iff t^3=1$ となる。

$t^2+t+1=0 \iff t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ だから，$x,\ y$ は「1の虚数3乗根」である。

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$ とおくと，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\omega^2$ となっている。（かけると，$1=\omega^3$ だから）

よって，$x,\ y$ は，一方が ω，一方が ω^2 である。

ゆえに，$x^{2022}+y^{2022}=\omega^{2022}+(\omega^2)^{2022}=(\omega^3)^{674}+(\omega^3)^{1348}=1+1=2$ 答

参考　2022年度　京都大学入試 文理共通問題

1　$5.4<\log_4 2022<5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301<\log_{10}2<0.3011$ を用いてよい。

2022年度　東京大学入試 理系問題

第2問　$a_1=1,\ a_{n+1}={a_n}^2+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)，(2) は略。　(3)　a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。